Т. Л. САATИ

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ ЗАВИСИМОСТЯХ И ОБРАТНЫХ СВЯЗЯХ

Аналитические сети

Приоритеты 1

Принятие решений 2

Метод анализа иерархий (AHP) 3

Аналитические сети (ANP) 4

Принятие решений при зависимостях и обратных связях 5

Обратные связи и зависимости в принятии решений 6

Экономические приоритеты 7

Социальные приоритеты 8

Принятие сложных решений 9

URSS

Thomas L. Saaty

DECISION MAKING WITH DEPENDENCE AND FEEDBACK

The Analytic Network Process

Т. Л. Саати

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЙ ПРИ ЗАВИСИМОСТЯХ И ОБРАТНЫХ СВЯЗЯХ

Аналитические сети

Перевод с английского
доктора технических наук, профессора
О. Н. Андрейчиковой

Научные редакторы:
доктор технических наук, профессор
А. В. Андрейчиков
и доктор технических наук, профессор
О. Н. Андрейчикова

URSS
МОСКВА

ББК 22.18 22.161.8 22.1п

Саати Томас Л.

Принятие решений при зависимостях и обратных связях: Аналитические сети. Пер. с англ. / Науч. ред. А. В. Андрейчиков, О. Н. Андрейчикова. — М.: Издательство ЛКИ, 2008. — 360 с.

В книге изложены основы нового подхода к анализу сложных решений, в которых могут быть учтены взаимные зависимости между критериями, альтернативами и другими элементами, представляющими рассматриваемую проблему. Метод аналитических сетей является обобщением известного метода анализа иерархий, математические основы и приложения которого также описаны в данной монографии. Приведены многочисленные примеры применения изложенных методов для решения сложных проблем в различных областях человеческой деятельности.

Книга может быть полезна для специалистов в области системного анализа и управления, преподавателей, студентов, аспирантов, а также для читателей, не имеющих специальной математической подготовки, которым приходится принимать сложные и ответственные решения.

Издательство ЛКИ 117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д. 9.
Формат 60×90/16 Печ л 22,5 Зак. № 1273

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».
117312, г. Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, д 11А, стр 11.

ISBN 978-5-382-00422-8 (рус.)
ISBN 0-9620317-9-8 (англ.)

5039 ID 56065
9 785382 004228

Оглавление

Предисловие к русскому изданию

Люди постоянно принимают решения. Так было в прошлом, настоящем и, наверное, так будет всегда. Принимая сложные решения, мы пользуемся нашей памятью и знаниями, независимо от того, насколько связными и полными они являются. Результаты наших решений зависят от наших суждений и иногда от суждений других людей; мы часто испытываем затруднения, решая, что имеет больший приоритет и является более важным для нас, и как строить планы на будущее с учетом этой информации. За прошедшие 30 лет мы научились принимать решения на основе научного подхода, используя иерархии для систематизации важнейших факторов, которые участвуют в наших решениях. В течение 10 последних лет мы научились применять сетевые структуры решений, в которых учитываются зависимости и обратные связи в наших рассуждениях. Структуры с зависимостью и обратными связями часто требуются при анализе реальных проблем, возникающих на практике. Принятие практических решений связано с анализом вероятных выгод, возможностей, издержек и рисков. Признавая, что эти категории обычно имеют неодинаковую важность, мы должны объединить их так, чтобы вклад важнейших из них был наибольшим. Вместе с моими коллегами я применил эти идеи в данной книге к широкому спектру индивидуальных, корпоративных, национальных и международных проблем принятия решений.

Структуру решения можно представить иерархией, включающей цель, критерии и подкритерии, действующих лиц (акторов) с их целями, людей, на которых влияет рассматриваемое решение, и альтернативные варианты решения. Метод анализа иерархий (МАИ) позволяет найти лучший из альтернативных вариантов или распределить ресурсы между альтернативами пропорционально их приоритетам. Иерархия — это линейная структура, имеющая начальную вершину (фокус), за которой следуют организованные по уровням элементы, зависящие от некоторых или от всех элементов ближайшего выше расположенного уровня. Существуют многочисленные примеры решений, в которых элементы верхних уровней зависят от элементов нижних уровней. Кроме того, элементы одного уровня могут зависеть друг от друга. Такие структуры решений с зависимостью между элементами и обратными связями изучаются в методе аналитических сетей (МАС), для которого разработано программное обеспечение *Super Decisions*. Сетевые модели являются значительно более точным представлением реальных жизненных проблем, особенно в экономической, политической и социальной сферах, где задачи имеют высокий порядок сложности. Как МАИ, так и МАС можно применять для принятия коллективных решений, поскольку в них имеются процедуры объединения индивидуальных суждений в суждение группы, учитывающие не только количество участников, но также их авторитет, знания и осведомленность.

Я очень благодарен моему другу и коллеге доктору наук Ольге Андрейчиковой за ее самоотверженный труд, который сделал эту книгу по принятию решений доступной русским читателям. Я буду очень рад, если великий русский народ, представляющий серьезную силу в решении международных проблем, увидит в этой книге, как можно принимать сложные решения на основе всестороннего научного подхода. Все мы должны упорно трудиться, чтобы сделать этот мир более разумным и безопасным местом для жизни, где решения будут приниматься ответственно и будут соответствовать здравому смыслу, нашим чувствам и интеллектуальным возможностям. Думаю, что мы можем надеяться на то, что грядущие поколения сумеют покорить судьбу, открыв способ существования, который позволит людям на нашей планете жить в мире, где будет царить взаимопонимание, а не насилие.

Томас Л. Саати,
Питтсбург, Пенсильвания, США

Предисловие автора ко второму изданию

Изменения в двух первых главах первого издания книги были незначительными. Третья глава полностью переделана, и теперь в ней более ясно описаны концепция и математические основы метода аналитических сетей (МАС). Четвертая глава содержит элементарные примеры, иллюстрирующие основные идеи МАС. Глава 5 — самая объемная и, возможно, самая ценная, так как содержит многочисленные приложения МАС к реальным проблемам, включающим зависимости и обратные связи между элементами, с пошаговым описанием процессов принятия сложных решений и применением фирменного программного обеспечения. Остальные главы содержат совершенно новый материал по сравнению с первым изданием книги.

Шестая глава демонстрирует теоретическую и практическую взаимосвязь теории вероятностей и теоремы Байеса с МАС. Кроме того, там показано, что теория вероятностей может быть представлена сетевой моделью и вписывается в МАС как частный случай.

Глава 7 обеспечивает необходимое сопоставление методов измерения осязаемых и неосязаемых свойств в методах МАИ/МАС с евклидовой геометрией, на базе которой построены методы линейного программирования, применяемые для распределения ресурсов. Поскольку МАС используется в принятии решений, он требует применения комбинаторики и оптимизационных структур линейного программирования для оценки его эффективности в различных приложениях.

Глава 8 дает сжатое резюме метода анализа иерархий. Мы долго и трудно обсуждали целесообразность включения этой главы в книгу и решили, что в ней есть полезные сведения, которые могут представлять интерес для многих читателей: закон Вебера—Фехнера и его связь с фундаментальной шкалой, кластеризация элементов, чувствительность собственного вектора, сравнение аддитивного и мультипликативного способов синтеза, групповое принятие решений.

Книга содержит два приложения. Первое включает сведения из теории матриц и графов, второе взято из первого издания.

Я выражаю глубокую благодарность моей жене Розан, моему другу Кирти Пенивати за внимательное чтение рукописи и за помощь в создании окончательного варианта. Доктор Озден Баязит также читал рукопись и помогал делать рисунки к пятой главе. Новая версия программного обеспечения МАС обязана своим появлением Розан и Вильяму Адамсу, математику, который сделал его независимым от компьютерной платформы. Программное обеспечение было усовершенствовано благодаря усилиям моих аспирантов, среди которых я хочу отметить одного — уникального Марселя Минутоло. Я также благодарен моему прилежному студенту Еонмину Чо за работу со мной в течение многих месяцев над двумя приложениями из пятой главы. Одно из них было разослано некоторым конгрессменам и сенаторам в Вашингтоне перед тем, как они решили дать Китаю статус постоянного торгового партнера летом 2000 года. В заключение, моя благодарность Саре Ломбардо, моему старому другу и ассистенту, чье чувство вкуса при компоновке книги было совершенным.

«Я подобен алхимику, который пытается понять неосязаемое через осязаемое». (Сальвадор Дали, 1935)

Томас Л. Саати

Предисловие автора

Наша жизнь является совокупностью решений, которые мы принимаем в деловой и в частной сфере. Часто то, *когда* мы решаем, не менее важно, чем то, *что* мы решаем. Повседневная жизнь и история полны уроков, которые могут помочь нам распознать такие критические моменты. Мы учимся на своем опыте и на исторических примерах. Слишком поспешные решения могут оказаться неудачными; затягивание процесса принятия решения может означать упущенные возможности. В конце концов, самое важное — сформировать собственное мнение. Для этого нужен систематический и всесторонний подход к принятию решений.

Принятие решений является основой процесса достижения наших глобальных целей, важнейшими из которых являются выживание и обеспечение качества жизни. Быть человеком — значит быть лицом, принимающим решение (ЛПР). Жизнь обесценивается при утрате свободы выбора. Сегодня много делается в области исследования проблем принятия решений: создаются ассоциации многокритериального принятия решений, психологические группы, книги, пособия и всевозможные виды программного обеспечения. Конкурирующие теории принятия решений борются за лидерство в данной области. Однако действительно полезная теория должна находиться в гармонии с человеческими нуждами и человеческой природой. Она не должна требовать долгих лет практики для освоения изощренных методов, оценить которые способен только фанатик.

Метод анализа иерархий (МАИ, Analytic Hierarchy Process, AHP), описанный ранее в нескольких моих работах и в настоящее время широко используемый в принятии решений, представляет собой теорию, которая базируется на экспертных оценках и суждениях индивидуальных участников или групп. Метод аналитических сетей (МАС, Analytic Network Process, ANP), подробно описанный в этой книге, является обобщением МАИ (AHP). Впервые этот подход (МАС) был описан в моей книге «Метод анализа иерархий», изданной в 1980 году издательством Мак-Гроу Хилл. Настоящая книга — это второе издание отдельной книги по МАС. В МАС иерархия заменяется сетью, при этом, как и в МАИ, экспертные суждения интегрируются определенным образом для того, чтобы получить обобщенные значения приоритетов. Команда экспертов вырабатывает шкалу для оценки суждений, на основе которых выбирается одно лучшее решение или ранжируется множество альтернатив, при этом ресурсы распределяются пропорционально полученным приоритетам.

Самые ценные научные достижения появляются тогда, когда мы осмеливаемся выдвигать новые идеи, которые могут не соответствовать общепринятым понятиям и теориям. Фактически, наука прогрессирует, создавая новые методы для решения старых проблем. Использование шкал отношений — это методика, которая позволяет нам взглянуть на решение проблем в терминах выгод, издержек, возможностей и рисков по отдельности, а затем соединить их подходящим образом в единой шкале. Шкалы отношений соответствуют нашей природе.

Меня часто спрашивают о моей приверженности к шкалам отношений. Я помню принцип рычага Архимеда, с которым меня познакомил отец, когда мне было 12 лет, а также мой первый курс физики, прослушанный после окончания средней школы. Я узнал, что отношение весов двух тел можно заменить обратным отношением длин плеч рычага по обе стороны от точки опоры ($W_1L_1 = W_2L_2$, $W_1/W_2 = L_2/L_1$). Для меня было волшебством то, что вес может компенсироваться длиной, и что отношения весов и длин могут заменять друг друга. Мысль об этом подсознательно руководила мною в течение 28 лет, когда я изучал физику, математику, химию, биологию и даже теологию с энергией одержимого, стремясь найти принципы гармоничного уравновешивания или компромисса. Участвуя в переговорах по контролю над вооружениями, я имел неоценимую возможность находиться в реальной жизненной ситуации, которая требовала нахождения компромисса между системами оружия массового уничтожения двух супердержав.

Компромисс — это человеческий способ существования. Природа использует компромиссы повсюду, в том числе в человеческом теле, вырабатывая гормоны, действующие по принципу компенсации. Мозг уполномочен контролировать равновесие, вызывая или блокируя секрецию того или иного вещества, чтобы организовать работу всего тела. Я полагаю, что мозг должен действовать в соответствии с относительным принципом, так как он не хранит все шкалы измерений для определения абсолютных количеств каждого вещества, необходимого для поддержания баланса.

Компромиссы можно заметить повсюду в иерархических или сетевых моделях. Эта книга — о шкалах отношений и компромиссах между ними, которые направлены на достижение равновесия. Цель этой книги — показать, как можно выразить субъективные суждения с помощью шкал отношений универсальным способом, который позволяет связать наш опыт и знания с нашими целями.

Наука и разум помогают нам понять, кто мы есть и в каком окружении живем. Но факты и выводы, которые мы получаем через науку и разум, существенно зависят от наших ценностей и потребностей, а также от суждений, которые представляют наши ценности. Поскольку ценности и суждения разных людей отличаются, возникает необходимость в новой науке о суждениях и ценностях, которая помогла бы приблизиться к универсальности и объективности. С ее помощью мы сможем лучше понимать окружающий мир, сотрудничать, выживать и совершенствовать самих себя. В этой книге представлена математическая теория ценностей, аргументов и суждений, основанная на шкалах отношений, которая проиллюстрирована разнообразными примерами для того, чтобы связать научные и практические результаты и помочь нам в условиях неопределенности соединить «качественную» природу человека с конкретной частью нашего опыта, полученного из науки.

Я полагаю, что большую часть наших знаний, а также поведение можно интерпретировать в терминах относительных сравнений, выраженных в виде отношений. Даже для неосязаемых свойств, для которых не существует способов измерения, можно получить достоверные оценки, применяя относительный способ измерения путем сравнения с другими предметами, о которых мы знаем больше. К ним можно отнести цели, критерии и подкритерии, составляющие нашу систему ценностей.

Творческий ум управляется воображением и способностью рассуждать. Воображение отрывочно, поэтому необходимо иметь цель и связующую нить для создания целостного образа. В науке воображение всегда предшествует результату. В процессе синтеза результата рождаются открытия. Меня давно беспокоит отрывочная и недолговечная природа наших знаний. Это можно объяснить, с одной стороны, разнообразием нашего опыта, а с другой — отсутствием ориентированных на цели структур мышления в форме иерархий, которые необходимы для установления связей между множеством конкретных целей и множеством целей более высокого уровня, и так далее вплоть до конечной цели — нашего выживания.

Когда я начинал свою работу над МАИ в начале 70-х годов, я имел другое представление о действительности, чем сейчас, и считал, что МАИ позволит выявлять знания, которые отражают фрагменты общей системы мироздания. Со временем я обнаружил, что эта система определяется нашими субъективными ценностями и что она, в значительной степени, — наше собственное изобретение. Меня не удивляет, что люди проводят конференции, на которых спорят о бегстве от науки и рассудка. При структурировании одной и той же цели разные люди, скорее всего, построят разные иерархии. Со временем я понял, что все иерархии, относящиеся к предмету исследования, можно объединить в одну интерпретацию более высокого уровня. На самых высоких макро- и на самых низких микроуровнях мы не имеем знаний, связанных с нашими целями; мы можем плодотворно работать на средних (промежуточных) уровнях, которые доступны нашим органам чувств. Поскольку мы путешествуем к звездам и побеждаем вирусы, мы должны знать, как соединить большое с малым внутри одной системы ценностей. Мы — существа физического мира, объективные законы которого не связаны с нашими ценностями. Мы используем принципы иерархической композиции для представления и обобщения информации таким образом, чтобы их можно было применить и к малому, и к большому в одинаковой степени; к молекулам и атомам также, как к звездам и галактикам. Шкалы отношений дают нам возможность понять человеческий мир так же, как мы поняли мир физический. Можно сказать, что мы не изобрели шкалы отношений, а родились с ними. Нашему мышлению свойственно употребление относительных величин. В результате мы осмысливаем микро- и макроявления в целом, статистически, так, как если бы они были случайными, потому что не можем связать их напрямую с нашими целями. Шкалы отношений — это то, в чем нуждаются социологи в своих исследованиях, чтобы получить и проанализировать данные, выводимые на основе суждений, наряду со статистической информацией.

Наука о принятии решений делает акцент на ценностях и их приоритетах, которые дают нам повод говорить о нашем будущем, и о его функционально-структурном планировании. Возможно, мы сможем частично решить эту проблему, изучая генетику и выявляя взаимосвязь между двумя главными аспектами нашей природы: нашей нервной системой, с помощью которой мы познаем себя и передаем знания будущим поколениям, и нашей способностью продолжать свой род и производить потомков, более приспособленных к жизни.

Мой интерес к упорядочиванию приоритетов (приоритизации) в принятии решений возник в то время, когда я работал в агентстве контроля над вооружениями в Государственном департаменте США в Вашингтоне. Там я руководил исследовательскими проектами, в которых участвовали ведущие мировые экономисты, а также специалисты по теории игр и теории полезности, трое из которых стали лауреатами Нобелевской премии: Герард Дебрю, Джон Харсаньи и Райнхард Селтон. Я также участвовал в качестве наблюдателя в переговорах по разоружению с бывшим СССР в Женеве в 60-х годах. Из этого опыта я сделал два главных вывода. Первый заключается в том, что научные теории и модели в большинстве случаев оказывались слишком общими и абстрактными, что не позволяло применять их к специфическим проблемам нахождения компромиссов в области контроля над вооружениями. Для тех, кто готовил позицию США, было трудно заключить разнообразные аспекты в единые рамки и сформулировать практические и ясные ответы. Второй вывод состоит в том, что позиция США готовилась юристами, которые прекрасно понимали юридические вопросы, но были не лучше ученых при оценивании параметров систем вооружения, по которым достигался компромисс. В этом никто не был виноват. То, в чем мы тогда нуждались, — это реалистический и адекватный способ вычисления приоритетов, отражающих выгоды, возможности, издержки и риски при отказе от одной системы или от ее части взамен того, что согласна была сделать другая сторона. Я написал книгу о контроле над вооружениями и долгие годы был обеспокоен отсутствием систематического подхода, который можно было бы применять в процессе переговоров, связанных с принятием столь сложных решений. Тогда я решил сам заняться этой проблемой. МАИ и МАС — это результат множества моих работ, начатых в 1967 году и продолжающихся по сей день.

Впервые я предложил подход с использованием суперматрицы (МАС) в 1975 году и много раз обсуждал его сущность с моим коллегой по Вартону (Wharton School, University of Pennsylvania) Джеймсом Беннетом, который сейчас работает в университете города Сиракузы. Я очень ценю мое общение с этим блестящим ученым, чье базовое образование социолога и хорошая математическая подготовка оставили его сильным и свободным от ограничений моего специфического математического воспитания. При разработке теории, которая была бы полезной для решения практических проблем, меня вдохновляли заметки, сделанные двумя великими французскими учеными. Известный математик Эмиль Борель (как цитирует Элайс, см. ниже) пишет:

> *«Строго говоря, чисто логическая теория может существовать, не заботясь о наличии ее возможных приложений; однако такая теория является чисто интеллектуальной игрой, лишенной интереса, и недостойна называться наукой».*

Нобелевский лауреат в области экономики Маурицио Элайс*:

> *«Остается только сожалеть о вторжении математиков, которые больше интересуются развитием чисто математических моделей, чем анализом их отношений с реальным миром... Печально, что никому не нужные математические упражнения ценятся больше, чем подходящие методики анализа фактов. Основы теории вероятностей Колмогорова и теория игр Неймана—Моргенштерна представляют собой два блестящих примера из многих».*

Там же, на стр. 65, он же пишет:

> *«Мы должны быть осторожными в убеждении, что научная достоверность теории может быть доказана только на основе строгой аксиоматики. Являясь необходимой, истинная аксиоматика все-таки вторична по сравнению с критическим анализом аксиом, на которых она основана, и с сопоставлением ее результатов с наблюдаемыми данными».*

Томас Л. Саати

* Progress in Utility and Risk Theory / Hagen & Wenstop eds. Kluwer Academic Publishers, 1984. P. 114.

Глава 1

Перспективы

1-1. Введение

Существует два известных способа анализа причин и следствий. Первый основан на применении традиционной дедуктивной логики, где вывод результата осуществляется на основе предположений. Это — последовательный линейный подход, позволяющий получить множество отдельных заключений, после чего возникает проблема их непротиворечивого обобщения. Решение этой проблемы требует воображения и опыта, так как логика мало нам говорит или не говорит ничего о том, как на основе различных заключений получить некий интегрированный результат.

Другим способом является холистический подход, в котором все рассматриваемые факторы и критерии объединяются в иерархию или в сетевую структуру, допускающую наличие зависимостей между элементами. Все возможные результаты, которые можно вообразить, соединяются в таких структурах, а затем используются суждения и логика для оценки степеней относительного влияния элементов, на основе которых выводится обобщенный результат. Этот подход требует хорошего знания предметной области, он не полностью определяется способностью рассуждать логически, которой наделены не очень многие люди и которая не гарантирует открытия истины, так как предположения могут быть необоснованными, а рассуждение ошибочным. В данном подходе чувства и интуиция играют, по меньшей мере, такую же важную роль, как способность четко рассуждать и делать безошибочные выводы в логике. Может оказаться так, что некоторый фактор с невысокой степенью влияния, определенной логическим путем, будет обладать существенным кумулятивным влиянием из-за его косвенных взаимодействий с другими важными факторами.

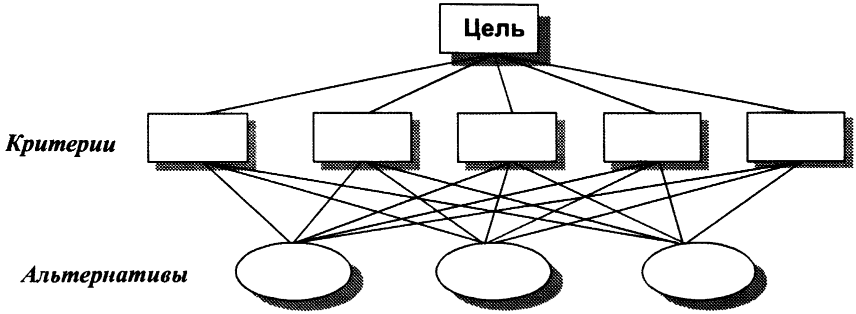


Рис. 1-1. Пример трехуровневой иерархии

Этот подход, как правило, приводит к результатам, которые хорошо согласуются с действительностью.

Похоже, что именно многокритериальная логика является тем инструментом, который позволяет рассмотреть проблему в целом (холистическим способом). Это — полезный и незаменимый инструмент анализа влияний в сложных системах.

В настоящей книге детально описывается метод аналитических сетей (МАС), являющийся обобщением метода анализа иерархий (МАИ) на задачи с зависимостями и обратными связями. Этот подход я предложил в 1975 году, через несколько лет после разработки МАИ. Для тех, кто не знаком с МАИ, предназначена вторая глава книги, где рассмотрены основы этого метода. Третья глава содержит теоретические основы МАС. В четвертой и пятой главах на множестве примеров и приложений показаны способы вычислений, которые выполняются в МАС. Глава 6 связывает МАС с теорией вероятностей и теоремой Байеса, в седьмой главе рассмотрены задачи распределения ресурсов, в том числе неосязаемых (нематериальных), и восьмая глава является кратким изложением основных принципов МАИ. В Приложении 1 приведены сведения из теории графов и матриц, а в Приложении 2 рассмотрены проблемы упорядочения объектов, описанных множеством свойств.

О МАИ уже много написано в книгах, статьях и докладах. МАС, вероятно, будет представлять гораздо больший интерес для будущих исследований. Эта книга является их началом.

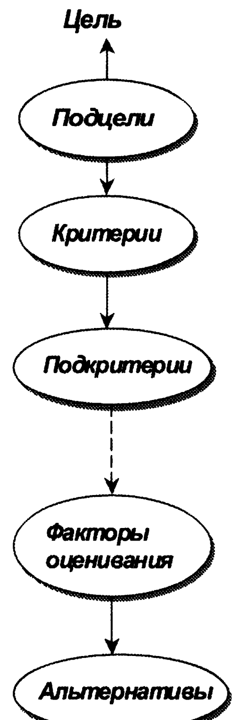


Рис. 1-2. Структура обобщенной иерархии

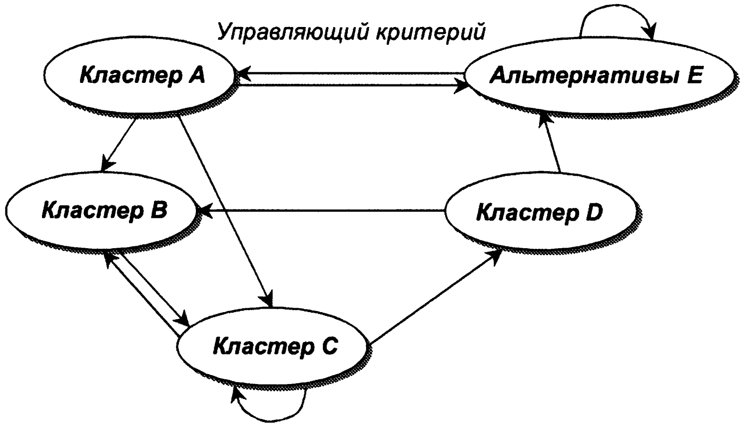


Рис. 1-3. Пример сетевой структуры

Настоящая книга посвящена структурам решений, которые встречаются в реальной жизни. Практически любую проблему принятия решений можно представить в виде иерархии (рис. 1-1 и 1-2).

На рис. 1-1 в качестве цели, расположенной на первом уровне, может рассматриваться покупка наиболее подходящего кому-то автомобиля; критериями второго уровня могут быть *Стоимость*, *Стиль*, *Комфортабельность* и *Цена перепродажи*; а альтернативами третьего уровня могут быть автомобили Chevy Cavalier, Ford Escort и Honda Civic.

Более сложный рис. 1-2 допускает присутствие уровня подкритериев между критериями и альтернативами. Например, под критерием *Стоимость* могут располагаться источники финансирования покупки, под критерием *Комфортабельность* — множество возможных стилей и различные особенности машин, связанные с удобством. В иерархии может присутствовать несколько уровней подкритериев. Часть критериев может не иметь подкритериев. Уровень подкритериев, расположенный непосредственно над альтернативами, может включать конкретные факторы оценивания. Однако многие проблемы принятия решений структурируются иначе и выглядят как **сети**, показанные на рис. 1-3 и 1-4.

На рис. 1-3 каждый кластер может представлять департамент в правительстве, группу в промышленности или часть населения, заинтересованную в смягчении воздействия загрязнения окружающей среды на живую природу. В качестве альтернатив могут рассматриваться, например, строительство автострады вблизи или вдалеке от определенного района.

На рис. 1-4 показана управляющая иерархия с двумя критериями, *Экология* и *Экономика*, на которые влияют все или некоторые из компонентов рассматриваемой проблемы. Влияние на критерий *Экология* представлено сетевой структурой с взаимными зависимостями и обратными связями, в то время как влияние на управляющий критерий *Экономика* представлено иерархией. При этом как в сети, так и в иерархии рассматривается одно и то же множество альтернатив.

> **Влияние**
>
> В чем разница между сетью влияний и иерархией влияний, и как мы можем определить, какую структуру использовать в конкретной проблеме принятия решений? В общем случае, иерархии ориентированы на задачи распределения некоторого свойства (цели) между сравниваемыми объектами. Результаты обработки иерархий позволяют судить о степени влияния или предпочтительности объектов. Сети предназначены для представления задач распределения взаимного влияния множества объектов относительно заданного свойства.

Примером сетевой структуры принятия решений является задача о том, как могут члены конгресса США влиять на президента, рекомендуя ему определенные меры по предотвращению преступности или снижению налогов. При этом в процессе сравнений задают вопрос: кто из двух членов конгресса оказывает большее влияние на президента?

МАС — это теория измерений, в общем случае применимая к задачам *доминирования влияния* среди нескольких участников или альтернатив по некоторому критерию или атрибуту, как в примере о влиянии членов конгресса на президента по вопросам преступности или налогов. МАС также может применяться для оценки доминирования среди критериев по критерию более высокого уровня. Например, чтобы улучшить экономические показатели страны, необходимо уменьшить дефицит бюджета или увеличить экспорт и оценить соответствующие действия в относительных терминах. При постановке задач в МАИ альтернативы оцениваются относительно управляющего критерия или атрибута. В качестве управляющего критерия может рассматриваться, например, бюджет, а в качестве альтернатив — уменьшение бюджетного дефицита или снижение финансирования программ социального обеспечения.

> **Доминирование**
>
> В общем случае доминирование означает большее влияние относительно определенного свойства. Когда говорят, что один объект доминирует другой, подразумевают, что он является более влиятельным, более предпочтительным или его появление более вероятно, чем появление другого объекта.

Доминирование — примитивная концепция, которая используется при сравнении объектов по критерию, сформулированному как обладание некоторым свойством или как выполнение определенных условий. В процессе сравнений задают вопрос: какой из двух элементов обладает заданным свойством или соответствует заданному критерию в большей степени,

Рис. 1-4. Управляющая иерархия

чем другой элемент, и насколько большей? Например, мы можем спросить: какой из двух автомобилей предпочтительнее по стилю и, следовательно, доминирует другой автомобиль, и насколько сильно доминирует? Мы различаем два типа доминирования среди объектов. Первый, связанный с обладанием тем или иным свойством, будем называть прямым доминированием. Второй тип, называемый косвенным доминированием, определяется мерой взаимного влияния объектов относительно некоторого свойства. При прямом доминировании мы часто сравниваем объекты попарно, чтобы определить, какой из них обладает заданным свойством в большей степени, и насколько большей. При косвенном доминировании мы выполняем парные сравнения объектов, чтобы установить доминирование их влияния на некий третий объект относительно некоторого свойства. Например, можно спросить: какой из двух конгрессменов больше влияет на президента в вопросах программ здравоохранения, и насколько сильнее его влияние? Более подробно о распределении влияния мы будем говорить в третьей главе книги.

Прямое доминирование

Элементы, называемые альтернативами, имеют свойства или атрибуты. Они могут также удовлетворять определенным стандартам или условиям, которые мы будем называть критериями или подкритериями. Мы можем спросить: какая из двух альтернатив доминирует по наличию заданного свойства или по степени удовлетворения заданному критерию? Мы также можем рассматривать единственную альтернативу и спрашивать о том, какое из двух ее свойств является доминирующим относительно удовлетворения некоторому стандарту или цели. Например, какие способности больше развиты у конкретного человека: актерские или музыкальные, и насколько больше развиты? Наверное, всем знакома ситуация, когда необходимо ответить на вопрос: какой критерий является самым важным для достижения цели? Такой же подход можно применять для оценки свойств, альтернатив и т. д. Например, характеризуя людей, можно выяснить, какое из своих качеств они показывают в наибольшей степени.

Косвенное доминирование

Независимо от того, обладают ли элементы некоторым свойством, они могут влиять на другие элементы или делать их носителями этого свойства. Например, тренер команды может помочь игрокам стать сильнее в спорте, даже если он сам не очень силен в нем. Сравнивая два объекта, мы спрашиваем, какой из них сильнее влияет на третий объект в смысле обладания некоторым свойством.

Познавая мир, мы полагаем, что можем описать его, определяя отношения между его частями и применяя суждения для объединения этих частей в соответствии с поставленной целью. С самого начала наш ум определяет и связывает части под влиянием нашего опыта и наших субъективных ценностей, поэтому объективных и абсолютно правильных ответов здесь просто не существует. Иначе и не может быть, так как наше понимание постоянно изменяется. Результат решения реальной жизненной проблемы определяется комплексом причин и последствий наших собственных действий, а также того окружения, в котором мы живем. Если мы планируем наши действия, внимательно анализируя связи между ними, у нас появляется шанс мысленно определить те результаты, которых мы вправе ожидать.

Ценности

Мы используем наши субъективные ценности для того, чтобы связать и интерпретировать все известные нам теоретические и эмпирические знания. Ценности — это фокус нашего существования. Это тот цемент, который связывает нашу энергию, мысли и действия. В сущности, наши ценности — это и есть мы. Нет ничего абстрактного или вечного. Несмотря на некоторые пересечения, ценности растений или пчел отличаются по сути и по значению от человеческих ценностей. Это не значит, что наши ценности важнее, чем ценности дерева; на самом деле, в то время как деревья и их ценности могут быть важными для нас, мы и наши ценности не представляют интереса для деревьев, за исключением тех случаев, когда мы хотим их уничтожить.

Наши ценности помогают нам идентифицировать различные свойства и измерять их интенсивность. Ограниченность человеческого восприятия не позволяет измерять интенсивности свойств в неопределенно широком диапазоне. Интервал измерений, доступных науке, очень велик: от размеров атомов до размеров галактик. Однако область человеческих измерений и чувств весьма ограничена и включает небольшой набор величин. Например, наши персональные ценности имеют максимальные значения для таких целей, как выживание и физиологические потребности, меньшие значения для таких категорий, как безопасность, любовь, уважение, психологическая и социальная самореализация (в понимании Абрахама Маслоу); и минимальные значения для наших интеллектуальных и эстетических потребностей. Как члены общества, мы заинтересованы в выживании других людей, как часть природы — в сохранении окружающей среды. Кроме того, существуют ценности, менее инстинктивные, чем перечисленные выше, те, которые мы приобретаем из жизненного опыта. Вот список некоторых ценностей такого рода, к которым мы привержены:

- Физические: здоровье, физкультура, спорт.
- Образовательные: обучение, общение, информация.
- Экономические: деньги, собственность, промышленность, сельское хозяйство.
- Социальные: благосостояние, сотрудничество, организация.
- Политические: сила, влияние.
- Моральные: порядок, честность, доверие.
- Идеологические: религия, убеждения, энтузиазм.
- Технологические: новизна, прогресс, эффективность.
- Военные: безопасность, сила, защита, территория.
- Эстетические: живопись, музыка, театр.
- Конкуренция: реклама, качество, совершенствование, разумное ценообразование.
- Переговоры: выигрыши, уступки.
- Разрешение конфликтов: согласие.

Наука о принятии решений рассматривает отношения между альтернативными действиями, из которых следует сделать выбор, и нашей системой ценностей. Вот почему иерархические и сетевые структуры являются предметом нашего исследования.

Принятие решений — это процесс, который включает следующие этапы:

- представление проблемы в виде иерархии или сети с обратными связями;
- выявление суждений, которые отражают идеи, чувства и эмоции;
- представление этих суждений значимыми числами;
- синтез результата;
- анализ чувствительности результата к изменению суждений.

Шкалы и значения

На данном этапе важно проанализировать возможные виды шкал, используемых для измерений, и в частности, шкалы отношений. *Порядковая шкала* — это множество чисел, инвариантных (это значит, что их отношения будут оставаться неизменными) к монотонным преобразованиям. На порядковых шкалах операции умножения или сложения лишены смысла. *Интервальная шкала* — это множество чисел, над которыми разрешены линейные преобразования вида: $ax + b$, $a > 0$, $b \neq 0$. Различные интервальные шкалы не могут перемножаться, но числа, принадлежащие одной шкале, можно складывать. *Шкала отношений* — это множество положительных чисел, инвариантных к положительным подобным преобразованиям вида ax, $a > 0$. Разные шкалы отношений можно перемножать и делить друг на друга, оставаясь в шкале отношений, так как инвариантность результатов умножения и деления выводится из инвариантности исходных шкал. Числа, принадлежащие одной шкале отношений, можно складывать. *Абсолютная шкала* — это множество чисел, инвариантных идентичным преобразованиям. Числа из абсолютных шкал можно умножать и складывать, поскольку инвариантность сумм выводится из инвариантности самой шкалы. Отметим, что числа из интервальной шкалы нельзя перемножать, так как результат умножения не является интервальной шкалой. Например, выражение $(ax_1 + b)(ax_2 + b) = a^2x_1x_2 + ab(x_1 + x_2) + b^2$ невозможно представить в виде $ax + b$. На интервальной шкале можно вычислить среднее, но не сумму, потому что результат $(ax_1 + b) + (ax_2 + b) = a(x_1 + x_2) + 2b$ не приводится к виду $ax + b$. Однако, усреднив его путем деления на 2, мы получим интервальную шкалу. Подобным образом мы можем складывать значения из интервальной шкалы, умноженные на положительные числа, сумма которых равна единице, и получать взвешенное среднее, являющееся интервальной шкалой. Для шкал отношений результат сложения $ax_1 + ax_2 = a(x_1 + x_2) = ax_3$ принадлежит той же самой шкале отношений, а результат умножения $ax_1bx_2 = abx_1x_2 = cx_1x_2 = cx_3$ является новой шкалой отношений. Однако $ax_1 + bx_2$ не является шкалой отношений, поэтому недопустимо складывать оценки, принадлежащие разным шкалам отношений.

Таким образом, любые измерения, проведенные теоретическим или экспериментальным способом, которые приводят к шкалам отношений, интерпретируются людьми в терминах их индивидуальных или групповых ценностей и преобразуются к относительным шкалам отношений, поскольку они понятны и доступны для использования в качестве необходимого инструмента представления человеческих целей и ценностей.

Шкалы отношений

Шкалы отношений дают нам возможность связать реально существующие альтернативы с неосязаемыми критериями и ценностями. Они, в свою очередь, могут быть связаны с целями и критериями более высоких уровней и так далее, вплоть до цели, являющейся фокусом задачи принятия решения. Если мы каким-либо способом можем измерить альтернативы по некоторым критериям, то эти оценки в относительных единицах включаются в структуру рассматриваемой задачи. Например, принимая решение о покупке автомобиля, в иерархию можно включить критерий, значение которого вычисляется как обратная величина стоимости, поскольку, чем меньше стоимость машины, тем она предпочтительнее по данному критерию. Шкалы отношений позволяют нам лучше понять наши ценности и выводимые из них результаты.

Человеческий разум с его ограниченной сетью нервных волокон миниатюризирует накопленный опыт и создает собственные специфические структуры. Используя шкалы отношений, мозг обобщает усвоенную информацию, чтобы обеспечить пропорциональное управление движением мышц, выработку гормонов и ферментов, необходимых организму. Наше восприятие происходящего не всегда адекватно реальности. В свою очередь, результаты сознательного мышления и воображения необходимо формализовать в соответствии с требованиями пропорциональности так, чтобы их можно было интегрировать с теми подсознательными импульсами, которые управляют нашим телом, обеспечивая его стабильное функционирование и приспособление к окружающей реальности.

Самый сильный и самый общий закон природы — это не закон тяготения, а закон поведения при воздействии влияний различного рода. Важнейший закон человеческого разума, контролирующий влияния, должен устанавливать отношения между различными влияниями и между результатами этих влияний. Сила математики в реальном мире основана на том, что она помогает нам установить эту пропорциональность достаточно точным способом, поэтому мы всегда будем нуждаться в ней, имея подобные цели.

Люди имеют привычку брать числа из головы и утверждать, что они принадлежат той или иной шкале. В конце концов, шкалы состоят из чисел, и каждый вправе создать свою шкалу, выбрав множество чисел. Критический аспект многокритериального выбора можно сформулировать в виде вопроса: как соединить шкалы, используемые для измерения различных свойств (критериев), оставаясь при этом в рамках значимой шкалы? Эта задача не является тривиальной, поскольку здесь необходимо умение найти компромисс между измерениями, полученными на основе различных шкал.

Гениальной иллюстрацией идеи компромисса, или уравновешивания, является принцип архимедова рычага, упоминавшийся в предисловии:

$$w_1 l_1 = w_2 l_2; \quad \frac{w_1}{w_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

Соотношение весов уравновешивается обратным отношением длин плеч рычага. Чтобы поднять больший груз, вместо приложения большей силы на противоположной стороне рычага можно просто увеличить длину плеча, компенсируя вес длиной.

Важный аспект этой книги касается обработки структур, с которыми мы сталкиваемся в задачах принятия решений. Ясно, что структуры рассматриваемых задач не менее важны, чем математика, которой мы пользуемся для вычисления приоритетов. О том, как структурировать проблемы и применять эти структуры в практических задачах, рассказано в нескольких моих книгах. Для многих проблем выбора решений необходимо построение сложных иерархий, включающих более трех уровней. Моя аспирантка Кирти Пенивати показала, что структура модели и математический метод принятия решений должны соответствовать нашим интуитивным представлениям о выборе таким образом, чтобы результат либо совпадал с нашими ожиданиями, либо был достаточно надежным для того, чтобы мы охотно изменили свои ожидания в процессе исследования проблемы.

Выбор метода принятия решений

Рассматривая вопрос о выборе метода принятия решений для конкретной задачи, читатель должен разобраться с иерархиями, приведенными на рис. 1-5 и 1-6. Лучшей проверкой метода принятия решений является исследование его прогнозирующих возможностей. Вряд ли кто-то скажет вам прямо: «действуйте по моим правилам», «я расскажу вам, что нужно делать», «я знаю, какой должна быть структура вашей задачи принятия решений», «если вы будете следовать моим рекомендациям, то получите наилучшие результаты». Это не навязывается

Как выбрать лучший подход к принятию решений?

Существует почти полдюжины методов принятия решений, которые дают противоречивые результаты для одних и тех же данных. Как можно судить о достоинствах подхода?

Критерии для оценки методов принятия решений

(эволюционная коллекция Т. Саати)

Теоретические	***Прикладные***
▪ Реалистичность предположений о достоверности результатов. ▪ Возможность структурного обобщения. ▪ Возможность математического обобщения. ▪ Значимая шкала. ▪ Отсутствие парадоксов. ▪ Способность учитывать зависимости между элементами проблемы. ▪ Возможность прогнозирования изменений факторов, влияющих на решение. ▪ Точность выражения экспертных предпочтений.	▪ Интуитивная привлекательность. ▪ Применимость к осязаемым и неосязаемым факторам. ▪ Простота и доступность для непосвященных. ▪ Отсутствие эффекта черного ящика. ▪ Универсальность. ▪ Возможность постепенного и решительного пересмотра суждений. ▪ Дружественное представление результатов. ▪ Возможность поддержки групповых процессов принятия решений.

Рис. 1-5. Оценка методов принятия решений

прямо, но иногда скрывается за субъективностью недостаточно обоснованных суждений.

МАИ — относительно простой и доступный способ поддержки принятия решений, особенно при использовании программного обеспечения, разработанного фирмой *Expert Choice*. МАС намного шире и глубже, чем МАИ, и может применяться для анализа очень сложных проблем, включающих разнообразные взаимодействия и зависимости. Не следует думать, что простые каждодневные решения нужно представлять сложными структурами, включающими обратные связи. МАС предназначен для анализа структур, содержащих обратные связи, которые характерны для сложных корпоративных решений. Они требуют привлечения больших

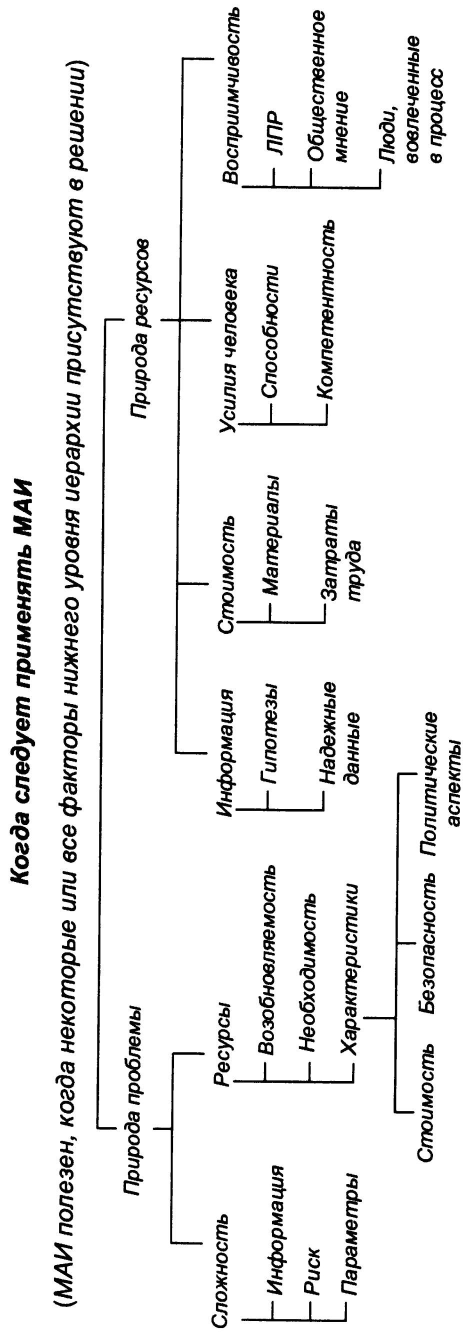


Рис. 1-6. Выбор метода принятия решений

объемов информации, отличаются наличием взаимодействия и зависимостей между элементами. Высокая степень сложности подобных задач оправдывает их представление сетевыми структурами. Примером сложной задачи является выбор варианта развития предприятия (слияние компаний или продажа филиалов; разработка нового продукта; освоение нового вида деятельности) и способа его реализации (каким должен быть устав, как он должен выполняться; как распределить деньги и другие ресурсы). Обработка данных в МАС должна выполняться с большей точностью, чем в МАИ, где отсутствуют обратные связи между уровнями иерархии, а результатом является упорядоченный набор альтернатив. МАС позволяет включить в рассмотрение все мыслимые аспекты проблемы, все имеющиеся знания и суждения. МАС рекомендуется для задач, в которых необходим максимально полный и систематический анализ влияний. Кроме этого, необходимость применения простых структур с зависимостями и обратными связями часто возникает при использовании МАИ в принятии решений. Умение обрабатывать зависимости между элементами проблемы принятия решений является не излишеством, а насущной необходимостью.

Четыре главные составляющие творческих процессов: 1) поиск решений; 2) синектика; 3) морфологический анализ; 4) принятие решений. Принятие решений и морфологический анализ имеют сходные аспекты, связанные со структуризацией атрибутов и критериев в терминах целей более высокого уровня, с определением приоритетов и выбором наилучших решений. В дальнейшем нас будут интересовать именно эти аспекты творческого мышления.

1-2. Проблема сравнения

Есть только один способ сопоставить объектам значимые относительные величины, который заключается в проведении сравнений в относительных терминах. На основе парных сравнений объектов мы можем вывести шкалу для их относительного измерения. Даже ребенок может сказать, что вес в 5 фунтов гораздо тяжелее, чем вес в один фунт. Кроме того, некоторые свойства объектов можно измерить непосредственно (без парных сравнений) с использованием существующих общепринятых шкал. Чтобы получить обобщенный результат, мы должны обрабатывать все атрибуты с использованием относительных измерений.

Шкалы измерений имеют тенденцию к линейности и однородности. Однако объективная реальность нелинейна и неоднородна. Шкалы являются просто количественными индикаторами, и было бы заблуждением думать, что в количестве есть некий смысл. Мы можем выявить смысл с помощью суждений, которые представлены числами, причем единственный способ сделать это заключается в сравнении объектов относительно общего свойства или цели. Сами по себе шкалы измерений не наделены семантикой.

Рассуждая о количественных оценках, мы должны помнить о том, что существует множество людей, которые очень мало знают о числах и об арифметике чисел. Они находят хорошие решения путем размышлений, которые основаны на их чувствах и знаниях. Не манипуляции числами, а постепенное обобщение знаний о влияниях приводит к удачным решениям. Понятие качества следует интерпретировать как результат влияния, а не как точное числовое значение или интервал на линейной шкале. Большую ценность представляют собой наблюдения за тем, как принимают решения люди, не владеющие какими-либо методиками. Они обычно формируют суждения на основе совокупности взаимосвязанных наблюдений, которые обобщаются в интегрированный результат, а не на основе множества градаций измерительного инструмента, каковым является шкала.

1-3. Об ошибочности интуиции при оценке бесконечных процессов

Если человека, мало знакомого с математикой, попросить, чтобы он интуитивно оценил, сходится ли последовательность

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

к конечному пределу или стремится к бесконечности, то многие скажут, что последовательность имеет конечный предел, так как к единице прибавляются числа, убывающие по величине. Данная последовательность похожа на геометрический ряд, сумма которого равна 2:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{1-1/2}=2\,.$$

Возможно, что кто-то даже рискнет поспорить на деньги о том, что сумма первого ряда не будет очень большой. Не больше 10, верно? Неверно. Сумма первого ряда стремится к бесконечности. Попробуем разобраться с этой проблемой. Гипотеза о сходимости вытекает из наблюдения, что элементы суммы вносят все меньший вклад в общий результат.

Частичные суммы	**Значение**
1	1.000
$1+\frac{1}{2}$	1.500
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$	1.833
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$	2.083
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$	2.233
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}$	2.250
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}$	2.642
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}$	2.767
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}$	2.879
$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}$	2.979

Полагаясь на интуицию, кажется маловероятным, что ряд, частичные суммы которого возрастают столь медленно, будет расходиться. Однако это достаточно легко показать, если его члены сгруппировать следующим образом:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{16}\right)+\left(\frac{1}{17}+\ldots+\frac{1}{32}\right)+\ldots.$$

Если в каждую последующую группу включить в два раза больше членов по сравнению с предыдущей, то суммы слагаемых во всех скобках будут больше 1/2. Например, возьмем последний член четвертой группы, который равен 1/8, и заметим, что при замене предшествующих ему членов на 1/8 мы уменьшим их значения, при этом сумма в скобках станет равна 1/2, следовательно, исходная сумма больше 1/2. Чем больше групп, тем больше общая сумма. Норвежский математик Абель в 1828 году писал: «Расходящийся ряд — изобретение дьявола, и следует устыдиться тем, кто им пользуется для демонстрации чего бы то ни было». Однако этот «дьявол» заставил нас думать, и в результате этих размышлений были созданы весьма полезные вещи.

Предположим, что кто-то занимается логическим анализом ряда событий, которые последовательно влияют друг на друга все в меньшей и меньшей степени, как в приведенной выше последовательности. Естественным предположением любого человека, особенно профессионального философа, будет то, что влияние, в конечном счете, уменьшится, и этот результат будет логически обоснован как закономерный. Очевидно, что оценка результата может быть ошибочной, особенно если оцениваемые числами влияния возрастают в группах гармонического ряда. Мы утверждаем, что на практике часто встречаются подобные ситуации. В таких случаях правильный результат невозможно получить на основе линейного логического вывода. Вот почему мы до сих пор не умеем правильно оценивать политические и социальные влияния. Для этого необходимо моделировать повторяющиеся, итерационные процессы и научиться получать их предельные оценки. Установлено, что достаточно часто такие предельные значения существуют при соответствующей структуре и параметрах рассматриваемых влияний. Нам необходим такой тип логического рассуждения, который позволит получать правильные результаты в реальных жизненных ситуациях. Это — основной тезис МАС и его составной части МАИ, который будет подробно рассмотрен во второй главе.

Прежде чем погружаться в технические аспекты предмета, я полагаю, что читатель сумеет лучше оценить его важность, ознакомившись со следующим разделом.

1-4. Общий взгляд на проблему

В жизни вообще, и в принятии решений в частности, нельзя полагаться исключительно на единственный исход или альтернативу. Все: суждения, практический опыт, рассуждения, логика, интуиция — иногда бывает ошибочным. Поэтому возникает необходимость применения структур, с помощью которых можно упорядочивать объекты и давать относительные оценки им и отношениям между ними. Оценки всех наших ощущений, мыслей и чувств имеют относительную природу и зависят от контекста, в связи с чем их интерпретация может быть неоднозначной, а иногда ошибочной.

В науке мы применяем логику для вывода линейных цепочек заключений, в математике — для доказательства теорем, в общем случае — для изучения отношений причинности. Мы также используем логику для построения иерархий и сетей, которые являются средством углубления наших знаний и поиска соответствия между окружающим миром и нашей системой ценностей. Наука — это изучение логических отношений и причинных связей в структурах, содержащих однородные сущности. Под однородными сущностями мы понимаем группу объектов, сходных или имеющих близкие значения определенных свойств при их сравнении относительно свойств объектов более высокого уровня. Мы определяем отношения между объектами на основе имеющихся знаний. Мы зашли в наших научных предположениях настолько далеко, что допускаем мысль о представлении вселенной множеством однородных групп, имеющих общие оси. Эти оси позволяют обобщать измерения для одной группы на другие, создавая возможность оценки отношений между группами. Результатом рассуждений такого рода являются выведенные учеными формулы, претендующие на абсолютную истинность. В действительности, наши формулы истинны только в ограниченных пределах, и нам пока не известен способ проверки их значимости в тех широких границах, для которых мы считаем их справедливыми. Вероятно, эти формулы являются хорошими приближениями для ограниченной области смежных, тесно связанных однородных структур с размытыми границами. Мы называем эти структуры фрагментами знаний и применяем наши формулы к этим фрагментам, как на микроуровне, так и на супермакроуровне. В МАИ мы исходим из предположения, что вселенная стратифицирована в пространство однородных структур, отношения между которыми подобны отношениям внутри каждой из этих структур.

Наука — это человеческая интерпретация объективной реальности, выраженная в терминах нашего собственного видения и практического опыта. Цель и смысл реальности невозможно определить вне этих рамок. В любом проводимом эксперименте используются определенные средства или инструменты, изобретенные нами для воздействия на наши чувства и ум таким образом, чтобы расширить границы нашего воображения по сравнению с личным восприятием, обусловленным нашим стремлением к выживанию и пониманием того, что такое выживание. Рисунок 1-7 демонстрирует самое общее видение мира человеком и показывает, где мы используем символы и размышления для его понимания. Наш мозг и творческое мышление, являясь частью природы, порождают ощущение цели с надеждой на то, что существует объективная реальность. Это представление о реальности формирует наши позиции в искусстве, науке и юморе, которые являются инструментами познания окружающего мира и самих себя. В процессе этого познания мы получаем ориентиры для дальнейшего поиска, и этот процесс бесконечен.

Нужно иметь воображение, чтобы связать неоднородные фрагменты некоторой структуры с помощью логики. Мы склонны предполагать, что тот же тип логики (дедуктивный), какой мы применяем для построения одного фрагмента, можно применить и для организации связей между фрагментами. Но в линейных цепочках рассуждений существуют разрывы, так как мы не можем универсальным способом измерить очень малое (квантовая теория) и очень большое (астрофизика) и не можем установить связь между такими измерениями. Мы нуждаемся в холистическом подходе, в котором используются иерархии, сети и рассуждения в терминах шкалы отношений. Такой подход позволит изучить влияния в структурах, содержащих наши цели, и проанализировать отношения между неоднородными группами, связывая очень малое с очень большим на основе нашей интерпретации целей существования этих систем.

Пять компонентов окружающей действительности

1. Физический мир (Материя, Энергия, Информация) ↑ 2. Наука, Техника, Исследования, Производство, Спорт (От размышлений и наблюдений к общему участию)	Биосфера ↑ Биология, Экология	Личность (Душа и Тело) ↑ Психология, Анатомия, Медицина	Общество (Социально-экономические отношения) (Физические умы и тела) ↑ Социология, Социальная психология, Бизнес, Политика
3. Средства художественного выражения Искусство, Музыка, Живопись, Скульптура, Танец, Поэзия, Проза	↑ Средства научного выражения Язык, Философия, Логика, Математика, Иерархии и Сети		Юмор
4.	↑ Поиск цели Согласие, Порядок, Религия		
5.	↑ Разум (Наука о строении мозга) Мозг, Мышление, Чувства, Эмоции, Интерпретация, Устойчивость, Хаос		

Рис. 1-7. Размышления с учетом целей, использующие способы выражения как инструменты познания мира

Мы можем применять логический вывод цепочек заключений для объяснения происходящего в однородных структурах. Иерархии и сети можно использовать для описания явлений более общего порядка, которые имеют место в неоднородных структурах. Подобные процессы характерны для нашего головного мозга, созданного природой. Наше восприятие действительности лучше всего представимо в виде иерархий и сетей, позволяющих нам более точно понимать, предсказывать происходящее вокруг нас и управлять им. Мысли и суждения, возникающие в наших нервных клетках, приводят к тому типу размышлений, который мы используем и который характерен для нашего биологического вида. Этот тип связан не с какой-то абсолютной истиной, а скорее с тем, как лучше обеспечить наше выживание. Форма существования Homo Sapiens возникла в результате эволюции от растительной жизни к низшим и затем к высшим формам животной жизни. Очевидно, все формы жизни имеют разнообразные способы чувствовать и приспосабливаться к большому и сложному миру, а также воздействовать на свое окружение с целью собственного выживания. Вероятно, физический мир существенно отличается от того, как его рисует нам человеческая наука. Этому есть много причин, и самой незначительной из них является та, что мы не имеем всех необходимых чувств, позволяющих нам охватить все мыслимые явления. Например, человеческий способ выживания кардинально отличается от способа выживания растений. Функционирование нашего мозга определяется его анатомией и физиологией. Неизвестно, есть ли в нем структуры, которые дают нам ощущения и абстракции ощущений всеми способами, которые необходимы, чтобы выделить достоверные знания из действительности. Следствием биологической природы является наша ограниченная способность воспринимать и интерпретировать события. Буддизм далеко выходит за рамки научных размышлений, выделяя пять главных атрибутов существования: форма, чувство, память, мышление и дух. Процесс, определяющий биологию и выживание растений (возможно, форма и дух), оказался настолько эффективным, что растения распространились по всей земле. Форма существования как способ выживания в окружающем мире оказалась удачной для растений благодаря интеграции физического создания с духовным началом, направленной на выживание во внешней среде. Успех в познании того, чем нужно обладать, чтобы выжить, приводит к успеху в физическом распространении, даже если оно является случайным процессом эволюции, направленным на поиск наиболее жизнеспособных видов в природе. Наши способности воздействовать на природу разнообразными средствами облегчают условия нашего выживания. Наши физические и умственные потребности, возможно, приведут к распространению нашего вида по всей Вселенной, подобно тому, как растения распространились по Земле. При этом может возникнуть цель введения в систему новых правил организации нашего вида, например покорение Вселенной с целью удовлетворения нужд человечества.

Глава 2

Принятие решений: иерархии

2-1. Метод анализа иерархий

Метод анализа иерархий (МАИ) является общей теорией измерения. Он применяется для вывода шкал отношений как из дискретных, так и из непрерывных парных сравнений в многоуровневых иерархических структурах. Сравнения можно провести на основе реальных измерений или с помощью фундаментальной шкалы, которая отражает относительную силу предпочтений и ощущений. МАИ имеет специфические аспекты, связанные с отклонением суждений от согласованности и с измерением этого отклонения, а также с зависимостью внутри групп (уровней) и между группами элементов иерархической структуры. Этот метод нашел широкое применение в задачах многокритериального принятия решений, стратегического планирования и распределения ресурсов [1], а также в задачах разрешения конфликтов [2, 3]. Кроме того, он весьма успешно применялся для прогнозирования [4]. В общем случае МАИ предназначен для анализа нелинейных структур, которые применяются для выполнения как дедуктивного, так и индуктивного вывода без использования силлогизма, а также для одновременного рассмотрения множества факторов с учетом зависимостей и обратных связей между ними и для нахождения компромисса в процессе вывода заключения.

Многие проблемы принятия решений включают как физические, так и психологические признаки. Под физическими мы подразумеваем те признаки, которые стало модно называть осязаемыми, поскольку они представляют определенный тип объективной реальности, существующей независимо от индивидуума, проводящего измерение. Напротив, психологические признаки, называемые неосязаемыми, представляют собой субъективные идеи, чувства и убеждения индивидуумов или общества в целом. Возникает вопрос: существует ли последовательная теория, которая способна учесть обе эти стороны реального мира? МАИ — это метод, который может использоваться для того, чтобы определить соответствующие измерения как в физическом мире, так и в социальной сфере.

Применяя МАИ для моделирования проблем, необходимо построить иерархическую или сетевую структуру для представления конкретной задачи, затем, попарно сравнивая элементы этой структуры, получить матрицы доминирования, а в непрерывном случае — ядра операторов Фредгольма, из которых выводятся шкалы отношений путем вычисления главных собственных векторов или собственных функций [5]. Эти матрицы, или ядра, являются положительными и обратно симметричными, т. е. $a_{ij} = 1/a_{ji}$. В работах [2, 6] было проведено специальное исследование свойств этих матриц. В связи с необходимостью обеспечения разнообразия суждений была проделана значительная работа в области синтеза коллективных суждений [7].

2-2. Абсолютные и относительные измерения. Структурная информация

Когнитивные психологи установили, что существует два вида сравнений: абсолютные и относительные. При абсолютных сравнениях альтернативы сравниваются с некоторым стандартом, который присутствует в памяти человека и формируется опытным путем, при относительных сравнениях альтернативы попарно сравниваются по общему признаку. В МАИ используются оба типа сравнений для вывода шкал отношений. Мы называем такие шкалы абсолютными и относительными шкалами измерений. Относительное измерение w_i, $i = 1, \ldots, n$, — это измерение, где каждый из n элементов принадлежит шкале отношений, выведенной на основе парного сравнения элементов друг с другом. При парных сравнениях два элемента i и j сравниваются по общему для них свойству. Элемент i, в меньшей степени обладающий этим свойством, принимается за единицу, а элемент j представляется числом, кратным этой единице, т. е. $(w_i/w_j)/1$, где оценка отношения w_i/w_j берется из фундаментальной шкалы абсолютных значений.

Абсолютные измерения (иногда называемые выигрышами или оценками) применяются для оценивания альтернатив в терминах критериев или в терминах *интенсивностей* критериев, примерами которых могут служить: превосходный (A), очень хороший (B), хороший (C), средний (D), ниже среднего (E), плохой (F) и очень плохой (G). После того как установлены приоритеты критериев (или подкритериев, если таковые имеется), выполняются парные сравнения самих интенсивностей (или лингвистических стандартов) с целью определить численные значения их приоритетов для каждого критерия, и каждое из этих значений делится на максимальную оценку интенсивности (идеальную интенсивность). Альтернативы оцениваются по каждому критерию с использованием сформированного набора интенсивностей, а на заключительном этапе соответствующие им числовые значения нормализуются путем их деления на общую сумму.

Абсолютные измерения использовались, например, при оценивании городов США по девяти критериям с использованием суждений шести экспертов. Другой пример уместного применения абсолютных измерений — отбор студентов, поступающих в учебное заведение [8]. Большинство учебных заведений устанавливают свои критерии независимо от уровня контингента абитуриентов. Приоритеты позволяют вузам определить, соответствует ли конкретный студент установленным стандартам. В этом случае следует применять абсолютное измерение для того, чтобы выбрать абитуриентов, достойных зачисления в вуз.

МАИ включает четыре аксиомы, которые касаются отношений обратной симметрии, процедур сравнения однородных элементов, иерархических и системных зависимостей, а также проблемы сохранения порядка полученных результатов и его зависимости от исходной структуры задачи и от ее расширения.

Важным вопросом в принятии решений является следующий: должно ли влиять добавление новых альтернатив к исследуемому множеству на ранее полученное ранжирование. Кто-то однажды решил, что добавление новых альтернатив не должно влиять на полученный порядок. Но опубликованные в литературе результаты экспериментов показывают, что изменение порядка может происходить в силу различных причин. Ответ на вопрос о сохранении порядка зависит от того, сколько альтернатив добавляется, и насколько они хороши, а также от того, изменяются ли предпочтения среди ранее рассмотренных альтернатив. В МАИ есть процедура, обеспечивающая сохранение порядка, которая может применяться, например, при выборе лучшего компьютера, и процедура, допускающая изменение порядка ранее ранжированных альтернатив, которая может применяться при выборе красивого галстука [7].

2-3. Фундаментальная шкала

В МАИ процедура парного сравнения применяется к парам однородных элементов. Неоднородные элементы разделяются на взаимосвязанные группы (кластеры) [7], содержащие однородные элементы. Фундаментальная шкала абсолютных значений для оценки силы суждений приведена в табл. 2-1.

Таблица 2-1

Фундаментальная шкала

Степень предпочтения	Определение	Комментарии
1	Равная предпочтительность	Две альтернативы одинаково предпочтительны с точки зрения цели
2	Слабая степень предпочтения	Промежуточная градация между равным и средним предпочтением
3	Средняя степень предпочтения	Опыт эксперта позволяет считать одну из альтернатив немного предпочтительнее другой
4	Предпочтение выше среднего	Промежуточная градация между средним и умеренно сильным предпочтением
5	Умеренно сильное предпочтение	Опыт эксперта позволяет считать одну из альтернатив явно предпочтительнее другой
6	Сильное предпочтение	Промежуточная градация между умеренно сильным и очень сильным предпочтением
7	Очень сильное (очевидное) предпочтение	Опыт эксперта позволяет считать одну из альтернатив гораздо предпочтительнее другой: доминирование альтернативы подтверждено практикой
8	Очень, очень сильное предпочтение	Промежуточная градация между очень сильным и абсолютным предпочтением
9	Абсолютное предпочтение	Очевидность подавляющей предпочтительности одной альтернативы над другой имеет неоспоримое подтверждение

Обратные значения оценок предпочтения	Если предпочтительность i-й альтернативы по сравнению с j-й имеет одно из приведенных выше значений, то оценка предпочтительности j-й альтернативы перед i-й будет иметь обратное значение	Если x предпочтительнее y в пять раз, т. е. $x = 5y$, тогда $y = x/5$ или $y = 1/5x$
Последовательность суждений	Отношения, полученные на основе шкалы	Экспертные предпочтения в матрицах парных сравнений должны быть согласованными

ПРИМЕЧАНИЕ: В МАИ/МАС можно формировать матрицу парных сравнений на основе любой шкалы отношений, применяемой для измеряемых свойств сравниваемых объектов. В этом случае экспертная оценка заменяется отношением двух соответствующих измерений. Новая шкала (собственный вектор), которая выводится из матрицы парных сравнений, содержащей оценки реальных измерений, будет эквивалентна той, которую можно получить путем нормирования на единицу соответствующих измерений.

Фундаментальная шкала была получена на основе базовых уравнений модели нервного возбуждения, которые приводят к известному логарифмическому закону «стимул — реакция» (см. главу 8). Эффективность этой шкалы была проверена во многих приложениях, а также путем сравнения с другими шкалами при решении практических задач, результаты которых были заранее известны. *Числа из этой шкалы используются, чтобы показать, во сколько раз элемент с большей оценкой предпочтительности доминирует элемент с меньшей оценкой относительно общего для них критерия или свойства.* Менее предпочтительный элемент имеет обратную оценку предпочтительности. Таким образом, если x — оценка предпочтения, с которой больший элемент доминирует меньший, то $1/x$ — оценка предпочтительности меньшего элемента по сравнению с большим. Таким образом, операция инверсии базируется на нашей способности выполнять парные сравнения. Прием инверсии, применяемый для решения уравнений в математике, является обобщением обратного отношения, которое играет важную роль в процессах анализа сложных проблем.

Во многих ситуациях измерения элементов очень близки или связаны друг с другом, при этом сравнения проводятся не для того, чтобы определить, во сколько раз один элемент больше другого, а для выяснения степени близости большего элемента к меньшему. Допустим, мы хотим вербально оценить значения 1.1, 1.2, ..., 1.9 на основе парного сравнения значений 1 и 2. Прямое сравнение этих чисел не представляет проблемы. Наша задача состоит в расширении вербальной шкалы для того, чтобы определить более тонкие различия таким образом, чтобы значение 1.1 означало «чуть больше 1», значение 1.3 соответствовало бы понятию «умеренно больше», 1.5 — «существенно больше», 1.7 — «намного больше» и 1.9 — «бесспорно больше чем 1». Такой подход можно использовать на любом интервале от 1 до 9 для выявления тонких различий, если в этом есть необходимость, а также для еще более тонких, например на интервале [1.1, 1.2] и т. д. Таким образом можно с достаточной точностью сравнить близкие по свойствам элементы с другим элементами, свойства которых существенно отличаются. Теоремы, приведенные в [7, с. 54], гарантируют нам то, что малые ошибки в суждениях не приводят к большим ошибкам в шкале отношений, которая выводится из матрицы суждений.

2-4. Как задавать вопросы при проведении парных сравнений

Матрица парных сравнений позволяет выразить относительное превосходство одного объекта над другим по общему для них признаку. Фактически реальный мир для наблюдающего разума является набором стимулов, вызывающих нервное возбуждение. На сегодняшний день в нейрофизиологии установлено, что нервное возбуждение можно описать амплитудно-частотными характеристиками. Весь человеческий опыт закодирован сигналами подобного типа. Тогда не удивительно, что на более высоких уровнях абстракции сигналы человеческого мозга становятся взаимозаменяемыми и могут взаимно компенсироваться на уровне целей, как в примере с рычагом Архимеда, рассмотренном в предисловии. Конкретные объекты реального мира, также как стратегические концепты разума, можно декомпозировать в соответствии с общими признаками, которые, в свою очередь, определяются более детальными признаками, и т. д. По сути дела, все свойства могут быть сведены к очень простым признакам, которые связаны с возбуждением отдельных нейронов и описаны в терминах амплитуды и частоты. В частности, два яблока можно сравнить по спелости, являющейся общим для них свойством. Однако саму спелость можно сравнить с другими факторами по интенсивности возбуждения, которое они вызывают в мозге. Кроме того, можно выполнить относительное сравнение спелости и незрелости по интенсивности возбуждения, которое эти свойства стимулируют в отдельном нейроне (нейронах), судя о различии по реакциям, происходящим на более высоких уровнях. Нет никаких серьезных причин для прекращения процесса такой декомпозиции из-за того, что кто-то не согласен с тем, что подобные явления происходят в нервной системе.

Возьмите конкретного человека с его многообразием признаков и попытайтесь ответить на следующий вопрос: какой профессией этот человек лучше владеет: учителя или строителя, и насколько он лучше в одной профессии, чем в другой? Совершенно очевидно, что мозг человека, формирующего суждение, должен уметь отличать хорошего учителя от плохого, также как и строителя. Это умение зависит от опыта, который позволяет делать настолько тонкие различия, насколько это требуется, потому что любой индивидуум обладает разнообразными навыками и имеет различные уровни компетентности в каждом из них. Если вам понятен главный принцип выявления доминирования по общему свойству (критерию) в паре любых признаков, вам остается только оценить степень доминирования одного признака над другим. Например, красное яблоко с зеленым боком является в большей степени красным, чем зеленым, и при его оценке проводят сравнения с совершенно красным и абсолютно зеленым яблоком. Разнообразные примеры, приведенные в литературе, показывают, что при выявлении доминирования люди поступают именно так. Достоверность получаемых результатов продемонстрирована прогнозами, сделанными в области экономики, спорта, а также рядом прогнозов социальных и политических ситуаций, результаты которых стали известны позже. В человеческом мозге реальные и виртуальные стимулы вызывают аналогичные реакции, потому что и те и другие приводят нейроны в состояние возбуждения, таким образом предоставляя нам возможность определять различия в качестве и в интенсивности, независимо от того, можем мы их измерить или нет. Из сказанного можно заключить, что и знания, и опыт являются предметами социальной и психологической интерпретации.

Мы проиллюстрируем эти идеи простыми примерами, сопроводив их краткими теоретическими объяснениями.

Пример относительного измерения: покупка дома

Семья со средними доходами хочет купить дом. Члены семьи определили восемь важных для них факторов, или критериев выбора лучшего дома. Эти факторы разделяются на три категории: экономические, географические и физические. Можно было бы начать с исследования относительной важности этих трех категорий, однако семейство предпочитает установить относительную важность всех восьми факторов. Проблема заключается в выборе одного дома из трех имеющихся альтернатив. Применяя МАИ, на первом шаге необходимо структурировать проблему в виде иерархии (рис. 2-1). На первом уровне (в фокусе) иерархии расположена главная цель — *Выбор лучшего дома*. На втором уровне находятся восемь факторов или критериев, каждый из которых вносит определенный вклад в цель, и на третьем (самом нижнем) уровне — три дома-кандидата, которые оцениваются в терминах критериев, расположенных на втором уровне.

Для конкретной семьи важны следующие факторы:

1. *РАЗМЕР* — размер дома: число и размер комнат, площадь подсобных помещений, общая площадь дома.
2. *ТРАНСПОРТ* — транспортное сообщение: удобство и близость метро и автобуса.
3. *ОКРУЖЕНИЕ* — ближайшие окрестности дома: интенсивность движения транспорта, безопасность, вид местности, налоги, состояние окружающих зданий.
4. *ВОЗРАСТ* — возраст дома: как давно он построен.
5. *ДВОР* — пространство двора со всех сторон дома, а также пространство, разделяемое с соседями.
6. *УДОБСТВА* — современные средства обслуживания: посудомоечные машины, мусоропроводы, кондиционирование воздуха, системы сигнализации и т. д.

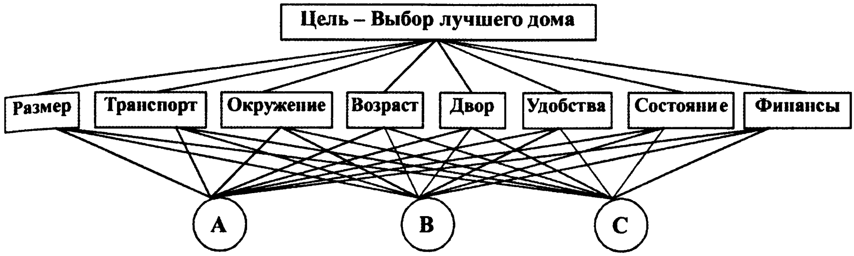


Рис. 2-1. Иерархия задачи о покупке дома

7. *СОСТОЯНИЕ* — общее состояние дома: необходимость ремонта, состояние стен, пола, проводки, обоев, чистота.
8. *ФИНАНСЫ* — финансовые условия: цена, предполагаемая ликвидность, условия оплаты, возможности кредитования.

На следующем шаге выполняются *парные сравнения*. Элементы второго уровня иерархии записываются в матрицу, которая заполняется суждениями людей, покупающих дом, об относительной важности элементов в свете главной цели.

При сравнении двух критериев следует задавать вопросы следующего характера: какой из двух сравниваемых критериев или факторов является более важным для семьи, покупающей дом, и насколько он важнее с точки зрения цели, отражающей меру удовлетворения домом?

Матрица парных сравнений факторов, сформированная покупателями дома, и вычисленные для нее приоритеты приведены в табл. 2-2. Элементами матрицы являются суждения, отражающие предпочтения покупателей дома. Суждения представлены вербальными и соответствующими им числовыми оценками из фундаментальной шкалы. Приоритеты, выведенные на основе суждений, измеряются в относительной шкале и показывают относительную важность факторов. В данном случае фактор *ФИНАНСЫ* имеет наибольший приоритет 0.348. В разделе 2-9 мы обсудим способ вычисления приоритетов, а также рассмотрим вопросы, связанные с определением максимального собственного числа λ_{max} матрицы парных сравнений и оценок согласованности суждений — индекса согласованности *C.I.* и отношения согласованности *C.R.*, которое присутствует в табл. 2-2.

В табл. 2-2 мы оцениваем предпочтительность фактора, указанного в строке, по сравнению с фактором, который приведен в столбце. При этом для измерения степени предпочтения используются суждения из фундаментальной шкалы (см. табл. 2-1). Если указанный в строке фактор не является доминирующим по предпочтению, используется обратное значение. Например, значение 5 в первой строке и втором столбце соответствует суждению о том, что размер дома является более важным фактором, чем

Таблица 2-2

Матрица парных сравнений факторов относительно цели (значения показывают доминирование фактора, расположенного слева, над фактором, указанным сверху)

Фактор	Размер	Транспорт	Окружение	Возраст	Двор	Удобства	Состояние	Финансы	Вектор приоритетов
Размер	1	5	3	7	6	6	1/3	1/4	0.175
Транспорт	1/5	1	1/3	5	3	3	1/5	1/7	0.062
Окружение	1/3	3	1	6	3	4	1/2	1/5	0.103
Возраст	1/7	1/5	1/6	1	1/3	1/4	1/7	1/8	0.019
Двор	1/6	1/3	1/3	3	1	1/2	1/5	1/6	0.034
Удобства	1/6	1/3	1/4	4	2	1	1/5	1/6	0.041
Состояние	3	5	2	7	5	5	1	1/2	0.221
Финансы	4	7	5	8	6	6	2	1	0.348

$\lambda_{max} = 8.811$; $C.R. = 0.083$

транспортное сообщение. Обратная величина 1/5 автоматически записывается на пересечении второй строки и первого столбца.

Теперь выполним парные сравнения вариантов дома, которые расположены на нижнем уровне иерархии, сравнивая их попарно относительно каждого критерия второго уровня. Так мы получим восемь матриц с размерностью 3 × 3, так как на втором уровне иерархии находится 8 критериев, а на третьем уровне — три альтернативы. Матрицы, приведенные в табл. 2-3, содержат суждения семьи, покупающей дом. Для лучшего понимания этих суждений, приведем краткое описание альтернатив:

Дом A: этот дом — самый большой из всех. Он расположен в хорошем районе (окружении) с небольшим движением транспорта и низкими налогами. Площадь двора этого дома больше по сравнению площадью двора домов *B* и *C*. Однако общее состояние дома не очень хорошее, поэтому при переезде потребуется косметический ремонт. Кроме того, в данном случае непривлекательны условия финансирования, потому что кредитование осуществляется банком с высокой процентной ставкой.

Дом B: этот дом немного меньше, чем *A*, и расположен не очень близко к нужному автобусному маршруту. Окружение дома кажется небезопасным из-за интенсивного движения транспорта. Двор довольно маленький, и дом не оснащен современными бытовыми средствами. Однако общее состояние дома очень хорошее. Предполагаемые финансовые условия являются вполне доступными, что означает возможность получения кредита с невысокой процентной ставкой. В окрестностях имеется несколько таких же домов, как *B*.

Таблица 2-3

Матрицы парных сравнений альтернатив

Размер дома	*A*	*B*	*C*	Нормирован. приоритеты	Идеализир. приоритеты
A	1	5	9	0.743	1.000
B	1/5	1	4	0.194	0.261
C	1/9	1/4	1	0.063	0.085

C.R. = 0.07

Двор	*A*	*B*	*C*	Нормирован. приоритеты	Идеализир. приоритеты
A	1	6	4	0.691	1.000
B	1/6	1	1/3	0.091	0.132
C	1/4	3	1	0.218	0.315

C.R. = 0.05

Транспорт	*A*	*B*	*C*	Нормирован. приоритеты	Идеализир. приоритеты
A	1	4	1/5	0.194	0.261
B	1/4	1	1/9	0.063	0.085
C	5	9	1	0.743	1.000

C.R. = 0.07

Удобства	*A*	*B*	*C*	Нормирован. приоритеты	Идеализир. приоритеты
A	1	9	6	0.770	1.000
B	1/9	1	1/3	0.068	0.088
C	1/6	3	1	0.162	0.210

C.R. = 0.05

Окружение	*A*	*B*	*C*	Нормирован. приоритеты	Идеализир. приоритеты
A	1	9	4	0.717	1.000
B	1/9	1	1/4	0.066	0.092
C	1/4	4	1	0.217	0.303

C.R. = 0.04

Состояние	*A*	*B*	*C*	Нормирован. приоритеты	Идеализир. приоритеты
A	1	1/2	1/2	0.200	0.500
B	2	1	1	0.400	1.000
C	2	1	1	0.400	1.000

C.R. = 0.00

Возраст	*A*	*B*	*C*	Нормирован. приоритеты	Идеализир. приоритеты
A	1	1	1	0.333	1.000
B	1	1	1	0.333	1.000
C	1	1	1	0.333	1.000

C.R. = 0.00

Финансы	*A*	*B*	*C*	Нормирован. приоритеты	Идеализир. приоритеты
A	1	1/7	1/5	0.072	0.111
B	7	1	3	0.650	1.000
C	5	1/3	1	0.278	0.430

C.R. = 0.06

Таблица 2-4

Распределенный и идеальный синтез глобальных приоритетов альтернатив

Веса критериев	Размер (0.175)	Транспорт (0.062)	Окружение (0.103)	Возраст (0.019)	Двор (0.034)	Удобства (0.041)	Состояние (0.221)	Финансы (0.345)	Глобальные
				(Распределенный способ)					
A	0.743	0.194	0.717	0.333	0.691	0.770	0.200	0.072	0.346
B	0.194	0.063	0.066	0.333	0.091	0.068	0.400	0.649	0.369
C	0.063	0.743	0.217	0.333	0.218	0.162	0.400	0.279	0.285
				(Идеальный способ)					
A	1.000	0.261	1.000	1.000	1.000	1.000	0.500	0.111	0.315
B	0.261	0.085	0.092	1.000	0.132	0.088	1.000	1.000	0.383
C	0.085	1.000	0.303	1.000	0.315	0.210	1.000	0.430	0.302

Дом C: Дом *C* очень маленький и частично оснащен современной бытовой техникой. Район благоустроенный и кажется безопасным, но в нем высокие налоги. Двор больше, чем у дома *B*, но гораздо меньше, чем у дома *A*. Общее состояние хорошее, в доме красивые ковровые покрытия и обои. Финансовые условия лучше, чем в случае *A*, но хуже, чем для альтернативы *B*.

В табл. 2-3 приведены матрицы парных сравнений домов, являющихся альтернативами данного решения, и их локальные приоритеты относительно критериев второго уровня иерархии, показанной на рис. 2-1.

Следующим шагом является синтез обобщенных приоритетов. Для того чтобы определить глобальные приоритеты альтернатив, мы записываем в матрицу (табл. 2-4) локальные приоритеты рассматриваемых вариантов по каждому критерию. Затем каждый столбец этой матрицы умножается на приоритет соответствующего критерия. Последующее суммирование по строкам дает компоненты вектора глобальных приоритетов альтернативных домов.

Из табл. 2-4 видно, что в случае вычисления приоритетов распределенным способом самым предпочтительным является дом *B* (0.369); при этом число и качество других альтернатив может оказывать влияние на результат. Этот способ, известный как метод доминирования, используется, когда ЛПР учитывает степень доминирования каждой альтернативы над всеми другими вариантами. Если мы будем выбирать дом, ориентируясь на некий идеальный эталон без учета количества и качества других альтернатив и степени их соответствия этому эталону (идеальный способ), то дом В (0.383) по-прежнему остается самым предпочтительным. В идеальном способе каждый столбец в табл. 2-4 был получен делением элементов выше расположенного столбца на максимальное значение в этом

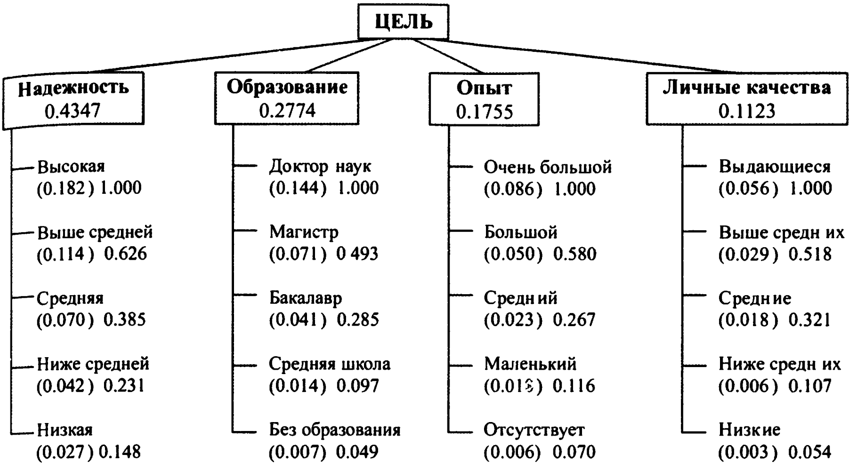


Рис. 2-2. Структура задачи повышения зарплаты служащим

столбце. Иногда в качестве идеальной альтернативы рассматривается некоторый фиктивный вариант, который имеет самые высокие оценки по всем критериям. В статистических испытаниях с 10 критериями и 3 вариантами оба способа давали одинаковые результаты выбора в 92 % случаев [7].

ПРИМЕР АБСОЛЮТНОГО ИЗМЕРЕНИЯ: ВЫБОР СЛУЖАЩИХ ДЛЯ ПОВЫШЕНИЯ ЗАРПЛАТЫ

МАИ является одновременно и дескриптивной, и нормативной теорией измерений. Проведение парных сравнений соответствует дескриптивному подходу. Нормативный подход проявляется в использовании экспертных суждений для создания шкалы интенсивностей (лингвистических стандартов), которую можно применять для раздельной оценки вариантов по одному. Последний подход известен как абсолютное измерение.

Рассмотрим пример: Фирма принимает решение о повышении зарплаты служащим. При этом используются критерии — *Надежность*, *Образование*, *Опыт* и *Личные качества*. Каждый критерий подразделяется на категории, стандарты, или подкритерии, как показано на рис. 2-2. Приоритеты критериев установлены путем парного сравнения и указаны на рис. 2-2 рядом с критериями. В этом примере самый высокий приоритет имеет критерий *Надежность* (0.4347). Затем проводятся парные сравнения стандартов (интенсивностей), соответствующих каждому критерию, относительно их родительского критерия (как показано в табл. 2-5). Полученные приоритеты делятся на максимальное значение интенсивности по

Таблица 2-5

Иллюстрация парных сравнений интенсивностей по критерию *Надежность*

Надежность	Высокая	Выше средней	Средняя	Ниже средней	Низкая	Приоритеты
Высокая	1	2	3	4	5	0.417
Выше средней	1/2	1	2	3	4	0.263
Средняя	1/3	1/2	1	2	3	0.160
Ниже средней	1/4	1/3	1/2	1	2	0.097
Низкая	1/5	1/4	1/3	1/2	1	0.062

Отношение согласованности C.R. = 0.015

Таблица 2-6

Оценки альтернатив с использованием стандартов (интенсивностей)

Служащий	*Надежность* 0.4347	*Образование* 0.2774	*Опыт* 0.1755	*Личные качества* 0.1123	Общая оценка
1. Adams. V	Высокая	Бакалавр	Небольшой	Выдающиеся	0.646
2. Becker. L	Средняя	Бакалавр	Небольшой	Выдающиеся	0.379
3. Hayat. F	Средняя	Магистр	Большой	Ниже среднего	0.418
4. Kesselman. S	Выше средней	Средняя школа	Отсутствует	Выше среднего	0.369
5. O'Shea. K	Средняя	Доктор наук	Большой	Выше среднего	0.605
6. Peters. T	Средняя	Доктор наук	Большой	Средние	0.583
7. Tobias. K	Выше средней	Бакалавр	Средний	Выше среднего	0.456

каждому критерию (вторая цифра на рис. 2-2). Далее каждому лингвистическому стандарту ставится в соответствие численное значение интенсивности, которым можно пользоваться для оценки объектов по данному критерию (табл. 2-6). Назначенные альтернативам значения интенсивностей умножаются на веса соответствующих критериев и суммируются для получения градаций обобщенной шкалы, которая будет использоваться для упорядочивания альтернатив относительно цели выбора. Этот подход можно применять всегда, когда можно установить приоритеты для интенсивностей критериев, что, в свою очередь, возможно, когда накоплен достаточный опыт проведения подобных операций. Зарплата служащим может быть повышена пропорционально значениям результирующих приоритетов. В общем случае наборы лингвистических стандартов могут отличаться от приведенных в данном примере.

Роль идеального элемента

Если сравниваемые альтернативы являются взаимно исключающими, а рассматриваемое множество включает все возможные варианты, то лучшая альтернатива, выявленная с помощью относительного измерения, представляет собой оптимальный вариант из всех возможных. Однако если рассматриваемое множество является неполным, то могут существовать другие варианты, лучшие или худшие по сравнению с найденным лучшим вариантом. В связи с этим многие думают, что в этой ситуации единственно правильным методом является абсолютное измерение, но это не так. Можно стремиться найти самый лучший из возможных вариантов, который может присутствовать или отсутствовать в рассматриваемом наборе альтернатив, чтобы использовать его в качестве стандарта (идеала, эталона) для измерения других вариантов. Такой способ измерения дает ранжирование вариантов, которое не изменяется при последующем добавлении новых альтернатив или удалении ранее рассмотренных. На самом деле «идеал» может оказаться лучше того стандарта, который мы выявили при рассмотрении неполного множества альтернатив. В этом случае необходимо исследовать другие варианты для включения в существующий набор. При этом их нужно будет оценивать по одному в порядке убывания предпочтительности, чтобы получить соответствующее ранжирование.

В действительности эталонный вариант может быть не самым лучшим по некоторым критериям, тогда возникает проблема получения обобщенного ранжирования на основе множества различных порядков альтернатив по отдельным критериям. При этом опять возникает необходимость в фиктивном или составном стандарте. В абсолютном измерении при отсутствии варианта, являющегося самым лучшим по всем критериям, формируется фиктивная альтернатива с идеальными свойствами. Это выполняется путем деления приоритетов всех альтернатив на приоритет *идеала* по каждому критерию. Таким образом, идеальная альтернатива по каждому критерию имеет значение 1, а другие варианты получают значения, пропорциональные их приоритетам.

Абсолютное измерение с помощью идеального эталона гарантирует сохранение порядка при добавлении или удалении альтернатив в любых ситуациях, но это свойство не является нормативным законом, который должен всегда соблюдаться. Рассмотрим эту проблему подробнее.

2-5. О шкалах отношений

Читатель уже познакомился с тем, как выводится относительная шкала из оценок численного доминирования в матрице парных сравнений. Независимо от того, какие числа используются в матрице, мы всегда получаем относительную шкалу, вычисляя главный собственный вектор. Но насколько значима эта шкала, и насколько такой подход является более обоснованным по сравнению с произвольным представлением действительности? Не любая выводимая шкала отношений адекватна реальности. Что касается значимости измерений с помощью шкал отношений, существует четыре типа выводимых шкал:

1. Абсолютная шкала отношений, в которой парные сравнения выражены абсолютными значениями из фундаментальной шкалы, как в МАИ. Шкала отношений содержит информацию об относительных величинах измеряемых элементов. Наиболее значимая шкала отношений выводится из непротиворечивого набора абсолютных значений фундаментальной шкалы, используемых в процессе парных сравнений.
2. Относительная шкала отношений, в которой парные сравнения представлены отношениями чисел из некоторой базовой шкалы. В этом случае мы заменяем фундаментальную шкалу оригинальной шкалой отношений. Полученная шкала будет значимой настолько, насколько значима используемая базовая шкала. Примеры использования шкал отношений можно найти в физике при измерениях длины, массы и времени. Если мы используем такие измерения для получения относительной шкалы, то в результате получаем соотношения величин, аналогичные исходным.
3. Порядковая шкала отношений, которая предназначена для выявления наличия или отсутствия превосходства, без какой-либо количественной оценки его степени. Подобные шкалы отношений представляют отношения порядка, которые не обеспечивают количественного измерения относительной предпочтительности рассматриваемых объектов. Использование такой шкалы нежелательно в многокритериальных задачах. Это подобно замене фундаментальной шкалы набором степеней некоторого числа.
4. Хаотическая шкала отношений — это шкала, выводимая из произвольного набора численных парных сравнений, в которых не присутствует семантика доминирования. Примером является использование случайных чисел для представления несогласованных суждений.

2-6. Сравнение аддитивной и мультипликативной композиции в МАИ

При возведении приоритетов альтернатив в степени, соответствующие приоритетам критериев, и последующем их перемножении с целью получения обобщенных оценок возникают серьезные проблемы. Чтобы лучше разобраться в них, рассмотрим два стоимостных критерия, которые могут быть измерены в деньгах. Обобщенную стоимость любой альтернативы с учетом двух критериев можно получить сложением долларовых значений по каждому критерию. Затем можно вычислить нормированные значения для всех альтернатив. К этому же результату можно прийти другим путем, а именно: после нормализации оценок альтернатив по обоим критериям вычислить для каждого критерия отношение суммарной стоимости вариантов под этим критерием к общей стоимости по обоим критериям. Это даст нам приоритеты критериев, которые используются как весовые коэффициенты векторов нормированных значений альтернатив при их сложении с целью вычисления нормированного вектора обобщенной стоимости, полученного ранее. Мы бы не получили тот же результат, если бы умножали приоритеты альтернатив, возведенные в степени, соответствующие приоритетам критериев.

Выбирая способ обобщения оценок альтернатив по нескольким критериям, нужно учитывать следующее:

1. Для проведения сравнений необходима возможность декомпозиции исходного множества объектов на однородные группы, что позволяет постепенно перейти от малых значений к большим, а затем интегрировать субъективные оценки экспертов. Сравнивая объекты попарно, мы можем легко и естественно оценить, во сколько раз предпочитаемый объект превосходит другой в смысле обладания некоторым свойством, принимая оценку менее предпочтительного объекта за единицу. На основе таких сравнений выводится шкала отношений для измерения относительных предпочтений. Нам было бы гораздо труднее сказать, в какую степень нужно возвести менее предпочтительное значение, для того чтобы получить более предпочтительное, поскольку мы не имеем знаний об относительных величинах такого рода для многих сравниваемых объектов.

2. В отличие от измерений в астрономии и квантовой физике, диапазон значений, которые способен применить человек для оценки своих ощущений, ограничен величинами невысоких порядков.

3. Формулы, которые применяются в науке, покрывают диапазоны от нуля до бесконечности, но человек не может таким же способом измерять свои ощущения. Абсолютные измерения в физике не совпадают с нашим восприятием значений этих измерений. Кроме того, мы не способны измерить нечто очень большое или очень малое с достаточной точностью, чтобы знать, насколько хорошо там работают наши формулы.

4. Т. Дж. Фехнер выдвинул гипотезу о том, что психофизический закон, выраженный логарифмическим отношением, применим для измерения объективной реальности от нуля до бесконечности, предполагая,

что интенсивность нашего восприятия также простирается от нуля до бесконечности. С другой стороны, опираясь на большое количество психофизических экспериментов, С. С. Стивенс с коллегами показали, что степенные функции являются наиболее подходящими для этой цели. Учитывая сказанное выше в пункте 1 и то, что результат получается путем агрегирования, нам не следует применять психофизический закон для покрытия широких диапазонов. МАИ естественным способом учитывает однородность объектов и базируется на декомпозиции.

5. Подход, основанный на использовании суперматрицы для представления зависимостей и обратных связей, требует построения шкал отношений, допускающих предельные операции над ними, включая бесконечные итерационные циклы. В этом случае аддитивный принцип обобщения является единственным приемлемым математическим способом, который тесно связан с подобными проблемами в теории графов и матриц.

6. Если подкритерии рассматривать как результат декомпозиции «родительских» критериев, то суммирование их глобальных приоритетов (которые получены путем умножения локальных приоритетов на веса родительских критериев) является более корректным способом восстановить веса критериев, чем перемножение этих приоритетов.

7. Наше естественное стремление к более широкому и глубокому видению мира реализуется с помощью подсознания, которое направлено на получение детальных знаний об окружающей реальности. Из этого следует, что иерархические структуры, представляющие наше восприятие действительности, со свойственной им множественностью элементов и уровней вполне подходят для этой цели. Составные приоритеты, вычисляемые для элементов различных уровней иерархии, должны постепенно приближать нас к истине, которую мы ищем. Аддитивная иерархическая композиция приводит к мультилинейным формам, являющимся простейшим видом нелинейных функций, компактность которых в различных математических пространствах гарантирует возможность обработки сложных иерархий, что позволяет нам приблизиться к истине настолько близко, насколько мы этого хотим. Интересно отметить, что классическая физика с ее изощренными формулами использует в основном величины первого и второго порядка для представления разнообразных явлений, с которыми она имеет дело. Мне кажется, что физический мир нуждается в структурах, не менее широких и глубоких, чем иерархии, с которыми мы сталкиваемся в человеческих взаимоотношениях. Эти структуры, согласно некоторым теориям, игнорирующим роль синергетики, являются только подмножеством физического мира.

8. Принцип аддитивной композиции в МАИ можно представить в виде $\sum_{i=1}^{n} a_i w_i$, где a_i — приоритет i-го критерия, $i = 1, \ldots, n$, w_i — вектор приоритетов альтернатив по i-му критерию. Некоторые исследователи предлагают использовать операцию логарифмирования после вычисления собственного вектора матрицы парных сравнений с последующим умножением логарифмов на приоритеты соответствующих критериев, сложением по всем критериям и заключительной операцией обратного логарифмирования. Можно механически записать $\sum_{i=1}^{n} a_i \log w_i = \sum_{i=1}^{n} \log w_i^{a_i} = \log \prod_{i=1}^{n} w_i^{a_i}$ и, вычислив обратный логарифм, получить мультипликативный результат $\prod_{i=1}^{n} w_i^{a_i}$. В этом преобразовании вызывает сомнение то, насколько значение возведенной в степень величины соответствует истинному, поскольку мы не можем вывести величину $\log w_i$ непосредственно из парных сравнений. Преобразование к логарифмам ничего не дает и фактически только искажает конечный результат. Кроме того, декомпозируя проблему на однородные группы в процессе получения приоритетов w_i, мы вычисляем значения, позволяющие естественно интерпретировать суждения, в результате получая реальное представление о мире на основе системы наших ценностей.

Мультилинейные формы, полученные методом аддитивной композиции, играют особую роль при выявлении значений на основе суждений в иерархических и сетевых структурах, аппроксимирующих наше холистическое понимание сложности. Таким образом, шаг за шагом, мы можем увеличивать глубину и точность поиска истинных значений.

2-7. Иллюзия сохранения порядка

Некоторые исследователи говорят, что МАИ допускает изменение порядка ранжированных альтернатив при добавлении новых вариантов, и считают это недостатком метода. Я полагаю, что, напротив, возможность изменения порядка является особым достоинством МАИ, потому что в реальной жизни изменение порядка ранее ранжированных объектов имеет место во многих ситуациях, связанных с выбором.

Под изменением порядка мы понимаем изменение порядка альтернатив, ранжированных по множеству критериев, после добавления нового варианта к рассматриваемому набору или после удаления из него какой-нибудь альтернативы при неизменной структуре множества критериев.

Существуют две научные школы, мнения которых расходятся в вопросе о сохранении порядка. Одна школа доказывает, что порядок должен сохраняться всегда. Другая считает, что изменение порядка имеет место на практике, поэтому любая теория или модель должна отражать этот факт.

Два нижеследующих примера демонстрируют ситуации, в которых может происходить изменение порядка. В первом примере это происходит из-за наличия множества копий одного из присутствующих вариантов. Во втором примере изменение порядка обусловлено добавлением нового варианта, имеющего очень высокое качество.

1. ***Влияние количества.*** Предположим, что кто-то нашел большой самородок блестящего золотистого металла и, думая, что это золото, прячет его «на черный день». Затем допустим, что этот же человек находит гору такого же металла в другом месте. Из-за своего обилия металл больше не создает чувства защищенности от возможных трудностей. Предпочтительность этого металла для человека уменьшается по сравнению с другими ценностями, которыми он владеет. Другими словами, большое количество металла уменьшает его ценность и, следовательно, приводит к изменению его положения в ранжированном наборе ценностей.
2. ***Влияние качества.*** Рассмотрим два автомобиля, A и B. Автомобиль A имеет невысокую стоимость и не очень большую долговечность, которая вполне приемлема для покупателя. Автомобиль B более дорогой и более долговечный. Поскольку трудно оценить, сколько стоит дополнительная долговечность, то при покупке может быть выбран автомобиль A. Теперь предположим, что производитель объявляет о скором появлении на рынке автомобиля C, который более долговечен по сравнению с B, но и стоимость его будет гораздо выше. При этом наше представление о цене долговечности становится более ясным. Автомобиль B может стать более предпочтительной альтернативой по сравнению с A. Другими словами, добавление нового варианта C изменило прежний порядок предпочтений для автомобилей A и B.

Факты, свидетельствующие об изменении порядка, приведены в литературе по психологии, а также подтверждены экспериментами известного исследователя А. П. Тверского [9]. Нетрудно сконструировать решения, в которых порядок должен сохраняться, но при изменении состава множеств критериев и альтернатив (а не какого-либо из экспертных суждений), как правило, допускают возможность изменения прежнего порядка. Таким образом, решение о том, должен ли сохраняться порядок, принимает ЛПР.

2-8. Комментарии к анализу выгод и издержек

В реальной жизни анализируемые варианты решений всегда имеют достоинства и недостатки. Принимая ответственные решения, как правило, требуется оценить выгоды и издержки для всех рассматриваемых альтернатив. В таких случаях полезно построить отдельные иерархии для издержек и выгод, с одинаковыми наборами альтернатив на нижнем уровне. Так можно получить векторы приоритетов альтернатив по выгодам и издержкам. Обобщенный вектор приоритетов, учитывающий и выгоды, и издержки, получается делением приоритета выгод на приоритет издержек для каждой альтернативы. Наиболее предпочтительный вариант характеризуется максимальным значением этого отношения. Отношение *Выгоды/Издержки* оказывается весьма полезным в задачах распределения ресурсов. При анализе простых решений критерии выгод и издержек можно объединить в одной иерархической структуре.

Например, при анализе трех типов копировальной техники в иерархии *Выгод* можно представить атрибуты, характеризующие их достоинства, а в иерархии *Издержек* — недостатки и затраты, связанные с покупкой и эксплуатацией машин различных типов. Отметим, что критерии в иерархии выгод и критерии в структуре издержек не должны быть прямо противоположными друг другу, они могут быть совершенно разными. Заметим также, что каждый критерий может характеризоваться различными категориями интенсивности (стандартами), и что эти категории, в свою очередь, могут быть упорядочены по приоритетам согласно желательности, при этом альтернативы оцениваются в терминах стандарта с максимальным приоритетом. Точно так же можно применять четыре иерархии для вычисления обобщенного отношения

$$BOCR = \frac{Benefits \times Opportunities}{Costs \times Risks} = \frac{Выгоды \times Возможности}{Издержки \times Риски}.$$

При анализе выгод и издержек необходимо убедиться, что они являются соразмерными для того, чтобы их отношение было значимым. Если иерархии *Выгод* и *Издержек* включают однородные критерии, то обобщенный результат можно получить последовательным объединением экономических выгод с экономическими издержками. Если один из этих компонентов незначителен по сравнению с другим, то соответствующая иерархия и вычисленные по ней приоритеты не учитываются, и в дальнейшем рассматриваются только *Издержки* или *Выгоды*, которые могут быть объединены с *Рисками*. Может оказаться, что *Выгоды* выражены в миллиардах долларов, а *Издержки* в миллионах, которые мы все же не можем себе позволить, и тогда следует учитывать как *Выгоды*, так и *Издержки*. С другой стороны, если издержки незначительны, например измеряются в десятках долларов или центах, то нам следует рассматривать только выгоды.

В общем случае можно установить приоритеты *Выгод, Издержек, Возможностей* и *Рисков* по критериям более высокого уровня иерархии, которые отвечают за интегральное качество рассматриваемого решения. Затем нужно построить и оценить четыре соответствующие иерархии и сравнить приоритеты, полученные для альтернатив. При этом можно использовать нормированные векторы *обратных* значений приоритетов по *Издержкам* и *Рискам* или учитывать их вклад в качество решения с обратным знаком. Вектор приоритетов *Выгод, Издержек, Возможностей* и *Рисков* применяется для взвешивания соответствующих векторов приоритетов альтернатив, которые после этого суммируются для получения окончательного ранжирования вариантов. Одним из способов учета неопределенности является включение возможных рисков в иерархии *Выгод* и *Издержек*. В этом случае отпадает необходимость построения отдельной иерархии *Рисков*. Новый подход к учету неопределенности, связанный с построением четырех иерархий, является эффективным средством поддержки процессов принятия сложных решений (см. главу 5).

Анализ достоинств и недостатков

Рассмотрим проблему оценки проектов с учетом возможных выгод. В таких задачах одним из важнейших критериев является финансовая прибыль, которая может иметь как положительные, так и отрицательные значения. Возникает вопрос, следует ли включать отрицательную прибыль в иерархию выгод. Если ЛПР способен выполнить парные сравнения интенсивностей без особых затруднений и получить приоритеты с приемлемой степенью согласованности, то нет причин говорить о том, что отрицательные категории интенсивности не должны рассматриваться в иерархии выгод. С другой стороны, если ЛПР оценивает все остальные положительные выгоды как чрезвычайно более важные по сравнению с отрицательными, то последние не нужно включать в эту иерархию. В таких случаях ЛПР должен рассматривать отрицательную финансовую прибыль как критерий в иерархии издержек. Так как конкретный проект может иметь либо положительную финансовую прибыль, либо отрицательную, то хороший проект должен иметь нулевую оценку под критерием «финансовая прибыль» в иерархии издержек. Для убыточного проекта характерно обратное (близкое к нулю значение по критерию «прибыль» в иерархии выгод). В общем случае необязательно, чтобы все критерии, используемые в модели принятия решений, применялись для оценки всех альтернатив.

Такой же метод рассуждений применяется для анализа вербальных оценок интенсивностей. Проведя парные сравнения таких оценок, можно

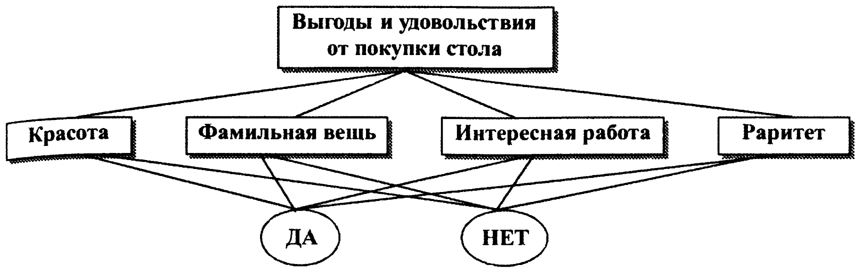


Рис. 2-3 Иерархия выгод для задачи о покупке стола

вычислить их приоритеты, включить уровень интенсивностей в иерархии выгод и издержек и использовать приоритеты оценок для измерения качества альтернатив по критериям.

Пример 1: Задача о покупке письменного стола

В США есть единственная в своем роде фирма Bartley, производящая традиционную американскую мебель, которую можно собирать самостоятельно. Они выпускают все части сборной мебели, которые изготовлены из лучших сортов древесины: гондурасского красного дерева, пенсильванской вишни и грецкого ореха. Для тех, кто знает толк в мебели, цены и условия оплаты, предлагаемые этой фирмой, весьма привлекательны. Фирма не скупится. Они вырезают деревянные части и обеспечивают заказчика клеем, наждачной бумагой, специальной мастикой для заполнения щелей, и гибкими скобами для скрепления склеиваемых частей. Они усовершенствовали метод окончательной окраски, который просто превосходен. Для знатоков они предлагают специальные проспекты, схемы проектов и заманчивые скидки. Их последнее предложение — письменный стол в стиле Бостон чиппендель середины XVIII века. Первым покупателям эта интересная вещь предлагается на 300 долларов дешевле. Автор этой книги

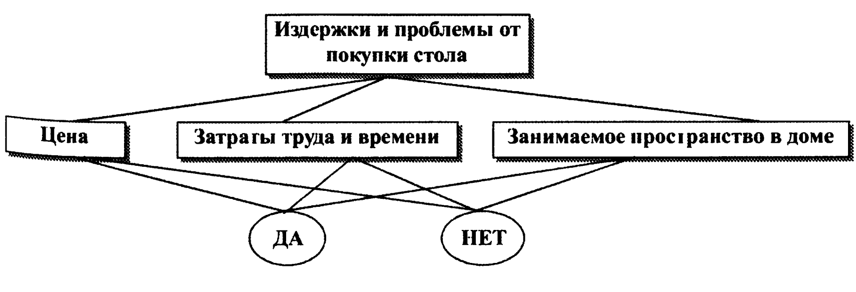


Рис. 2-4 Иерархия издержек для задачи о покупке стола

Таблица 2-7

Результаты парного сравнения критериев иерархии Выгод

	Красота	*Фамильная вещь*	*Интересная работа*	*Раритет*	**Приоритет**
Красота	1	5	7	1/5	0.25
Наследство	1/5	1	3	1/6	0.08
Интересная работа	1/7	1/3	1	1/9	0.04
Раритет	5	6	9	1	0.63
				C.R. = 0.12	

Таблица 2-8

Результаты парных сравнений альтернатив по критериям иерархии Выгод

Красота	*ДА*	*НЕТ*	**Приоритет**
ДА	1	6	0.86
НЕТ	1/6	1	0.14

Фамильная вещь	*ДА*	*НЕТ*	**Приоритет**
ДА	1	3	0.75
НЕТ	1/3	1	0.25

Интересная работа	*ДА*	*НЕТ*	**Приоритет**
ДА	1	2	0.67
НЕТ	1/2	1	0.33

Раритет	*ДА*	*НЕТ*	**Приоритет**
ДА	1	6	0.86
НЕТ	1/6	1	0.14

Таблица 2-9

Результаты парного сравнения критериев иерархии Издержек

	Цена	*Затраты труда и времени*	*Пространство*	**Приоритет**
Цена	1	1/5	1/3	0.097
Затраты труда и времени	5	1	5	0.701
Пространство	3	1/5	1	0.202
			C.R. = 0.12	

Таблица 2-10

Результаты парного сравнения альтернатив по критериям иерархии Издержек

Цена	*ДА*	*НЕТ*	Приоритет	Затраты труда и времени	*ДА*	*НЕТ*	Приоритет	Пространство	*ДА*	*НЕТ*	Приоритет
ДА	1	4	0.8	*ДА*	1	7	0.88	*ДА*	1	4	0.8
НЕТ	1/4	1	0.2	*НЕТ*	1/7	1	0.12	*НЕТ*	1/4	1	0.2

Таблица 2-11

Отношение *Выгоды/Издержки*

Альтернативы	*Выгоды*	*Издержки*	*Выгоды/Издержки*	*Выгоды/Издержки (нормированное)*
ДА	0.841	0.853	0.99	0.48
НЕТ	0.159	0.147	1.08	0.52

собрал и завершил несколько предметов мебели от Bartley, но в его доме уже довольно много красивой мебели. Должен ли он воспользоваться последним предложением? На рис. 2-3 и 2-4 показаны две иерархии, одна для выгод, а другая для издержек, которые иллюстрируют подход к принятию решения о целесообразности покупки. В табл. 2-7–2-11 приведены результаты парных сравнений. Окончательный результат приведен в столбце нормированных значений, характеризующих отношение *Выгоды/Издержки* в табл. 2-11. Он свидетельствует о слабой предпочтительности отказа от покупки (*НЕТ* = 0.52; *ДА* = 0.48).

Иногда думают, что рассматриваемую проблему определяет главная цель иерархии решений. Однако во многих случаях проблему определяет не только цель, а вся иерархия, включая предположения, сделанные при ее построении. В данном примере мы видим, что высокий приоритет критерия *Затраты труда и времени* в иерархии издержек свидетельствует о намерении ЛПР собрать стол самостоятельно, однако критерий *Интересная работа* имеет невысокий приоритет, а низкий приоритет критерия *Цена* указывает на то, что он имеет возможность заплатить за преодоление возможных при сборке стола трудностей. В результате автор обратился к местному изготовителю мебели, который помог ему в реализации проекта за относительно небольшую плату. Такой пересмотр проблемы привел к изменению окончательного результата. При этом приоритеты критериев иерархии издержек изменились следующим образом: приоритет критерия *Затраты труда и времени* уменьшился до 0.37, приоритет критерия *Цена* увеличился до значения 0.25, приоритет критерия *Пространство* стал равен 0.38. При таких значениях величина отношения *Выгоды/Издержки* для положительного решения о покупке (*ДА*) стала равной 1.02, а для отрицательного (*НЕТ*) — 0.93. Дальнейшее уменьшение приоритета критерия *Затраты труда и времени* усиливает эту тенденцию. В результате я принял решение купить стол и нанять помощника для сборки особо сложных частей.

Пример 2: Торговая война с Китаем из-за нарушения прав интеллектуальной собственности

Этот пример был решен совместно с моей коллегой Джен С. Шанг в середине февраля 1995 года с целью разобраться в проблеме о введении торговых санкций против Китая. Тогда средства массовой информации высказывали противоречивые мнения о мерах, которые должен был принять Пекин в конце месяца. Результаты проведенного анализа были разосланы конгрессменам, сенаторам и главному представителю США на переговорах с Китаем Микки Кантору, а также были направлены в некоторые американские и китайские газеты. Мы не ожидаем похвал за то влияние, которое наши результаты оказали на решение, принятое позднее, но все же мы чувствуем глубокое удовлетворение в связи с тем, что это решение совпало с нашими рекомендациями. Вскоре после 26 февраля я получил письмо из ведомства мистера Кантора, в котором нас поздравляли с результатом, который совпадал с подписанным американо-китайским соглашением. Я сохранил стиль изложения этого материала таким, каким он был во время написания этого доклада, чтобы лучше передать ощущение безотлагательности, которое мы тогда чувствовали.

Существует множество противоречивых мнений о том, что делать с китайским пиратством в области американских интеллектуальных товаров и высоких технологий. Следует ли Соединенным Штатам вводить санкции против Китая 26 февраля? США предлагают ввести высокие таможенные пошлины на ввоз китайских товаров с целью не допустить, чтобы Китай стал государством, не признающим международных норм, с закрытой экономикой, ориентированной на внутренний рынок. Некоторые политологи весьма убедительно доказывают, что государство, чья экономика через три десятилетия сравняется с экономикой США, должно научиться соблюдать общепринятые нормы. Мы исследовали решение об увеличении таможенных тарифов на китайские товары, поставляемые в США. Главные последствия этого решения заключаются не в том небольшом ущербе, который понесут американские корпорации в связи с такой мерой и который вызывает основное беспокойство, а в том, что может случиться в будущем. Эффект от введения пошлин будет почти незаметным по сравнению с долговременными последствиями, которые связаны с ухудшением торговли в странах тихоокеанского бассейна.

Полученный нами результат основан на анализе выгод, издержек и рисков, а также всех выявленных факторов, имеющих отношение к проблеме, и заключается в твердом и решительном отказе от введения санкций против Китая, поскольку такие меры не отвечают глобальным интересам США. Так как американцы не очень хорошо информированы о том, что думают в Китае, мы приводим некоторые аргументы, взятые из китайских газет. Мы подробно описываем этапы проведенного анализа и предлагаем читателю выразить собственное мнение, используя приведенную информацию, а также добавить другие факторы, которые мы, возможно, упустили. По нашему мнению, если с Китаем обойтись, как со страной, объявленной вне закона, то издержки от этого будут гораздо выше, чем в том случае, если Китай будет оставаться членом мирового сообщества.

Война за интеллектуальную собственность — это отражение спора между двумя странами. Существует ряд проблем, вызывающих разногласия между Китаем и США. Среди них — права человека, быстрый рост вооружений, независимость Тайваня и торговый дефицит США. В течение десяти лет до 1994 года китайский экспорт в США возрос с 3.1 до 38 миллиардов долларов, в то время как американский экспорт в Китай вырос только с 3 до 8.5 миллиардов. Такой дефицит в торговле заставляет США требовать от Китая взаимного открытия своих рынков для американских товаров.

Согласно журналу *Economist* от 11 февраля 1995 года, официальные цифры торгового дефицита были завышены. С одной стороны, эти цифры учитывают китайские товары, реэкспортируемые через Гонконг в США как импортные товары из Китая. С другой стороны, стоимость американских товаров, экспортируемых в Китай через Гонконг, не была добавлена к американским экспортным цифрам. В результате американская статистика завысила американский двухсторонний дефицит с Китаем, начиная с 1990 года, примерно на треть. Другой убедительный аргумент — это то, что дешевый китайский труд способствовал перемещению трудоемких производств из Гонконга и Тайваня в Китай. Товары, которые некогда импортировались из Тайваня и Гонконга, теперь считаются китайскими. Общий дефицит американской торговли с тремя этими странами, взятыми вместе, увеличился менее чем на 10 % с 1987 по 1992 год; но дефицит с одним Китаем вырос чудовищно и составил 550 % за тот же период. Когда капитал может свободно пересекать границы, величина двухстороннего дефицита может оказаться обманчивой. Несмотря на эти факты, осознание огромного торгового дефицита мешает США рассматривать незначительные выгоды, получаемые Китаем от нарушения прав американской интеллектуальной собственности, как малую долю торговли.

По нашему мнению, очень важным является участие Китая в глобальной коммерческой практике. Однако многие китайцы не до конца поняли лидирующую роль Соединенных Штатов в международной торговле. Они считают высокомерием со стороны США выступать в качестве судьи, полицейского или арбитра в международных спорах, а также вводить санкции против других государств, которые, в свою очередь, могут принимать ответные меры в защиту своего достоинства. Многие китайские должностные лица полагают, что, если они спокойно отреагируют на санкции, Китай приобретет имидж государства, которое не способно защитить собственный суверенитет, как в колониальную эру. Чтобы сохранить лицо, китайцы уже отказались от 97-миллионного контракта на приобретение зерна и угрожают расторгнуть договор с фирмой «Боинг», подписанный более чем на 2 миллиарда долларов. Очевидно, что они не собираются поддаваться запугиванию.

Среднегодовой доход на душу населения в Китае составляет 2946 долларов, что говорит о его большом отставании от развитых индустриальных стран в настоящее время. В течение десятилетий должностные лица и граждане в Китае не знали о том, что такое права интеллектуальной собственности. В связи с этим возникает вопрос: китайские власти откровенно потакают пиратству, или оно является одной из многих трудностей, с которой столкнулась в цивилизованном мире развивающаяся страна в процессе бурного экономического роста? Согласно китайским газетам, правительство Китая предпринимает попытки контролировать пиратство, но тем, кто смотрит на это извне, они кажутся неэффективными и не заслуживающими кредита доверия.

Кроме того, существуют политические трения между органами центральной и местной власти в Китае, а также между судебной и законодательной системами. Местные власти, как правило, не одобряют борьбу с пиратством, потому что она приводит к уменьшению облагаемых налогами доходов и к увеличению безработицы. Это является одной из причин, почему они не стараются добросовестно выполнять закон. В свою очередь, суды не относятся к пиратству серьезно, так как их персонал и финансирование зависит от местных органов власти. Многие из тех, кто получает прибыль от пиратства — дети высокопоставленных чиновников, армейских офицеров и провинциальных бюрократов. Высокопоставленные должностные лица слишком озабочены благополучием своих детей, чтобы всерьез заняться этой проблемой. Даже если бы Китай был вынужден подписать соглашение с США, реальные выгоды от этого сомнительны. Согласно *Wall Street Journal* от 6 февраля, очень небольшая часть китайцев может позволить себе купить CD за 14 долларов или версию *Windows* за 150 долларов, что вызывает некоторое сомнение относительно цифр, которыми иллюстрируют убытки от китайского пиратства. Пираты пробудили аппетит, которого не было десять лет назад. Однако наказание Китая за пиратство не приведет к автоматическому увеличению американского экспорта высокоинтеллектуальных товаров.

Чтобы найти рациональное решение, мы рассмотрели основные влияющие факторы, которые показаны на рис. 2-5. Они распределены по

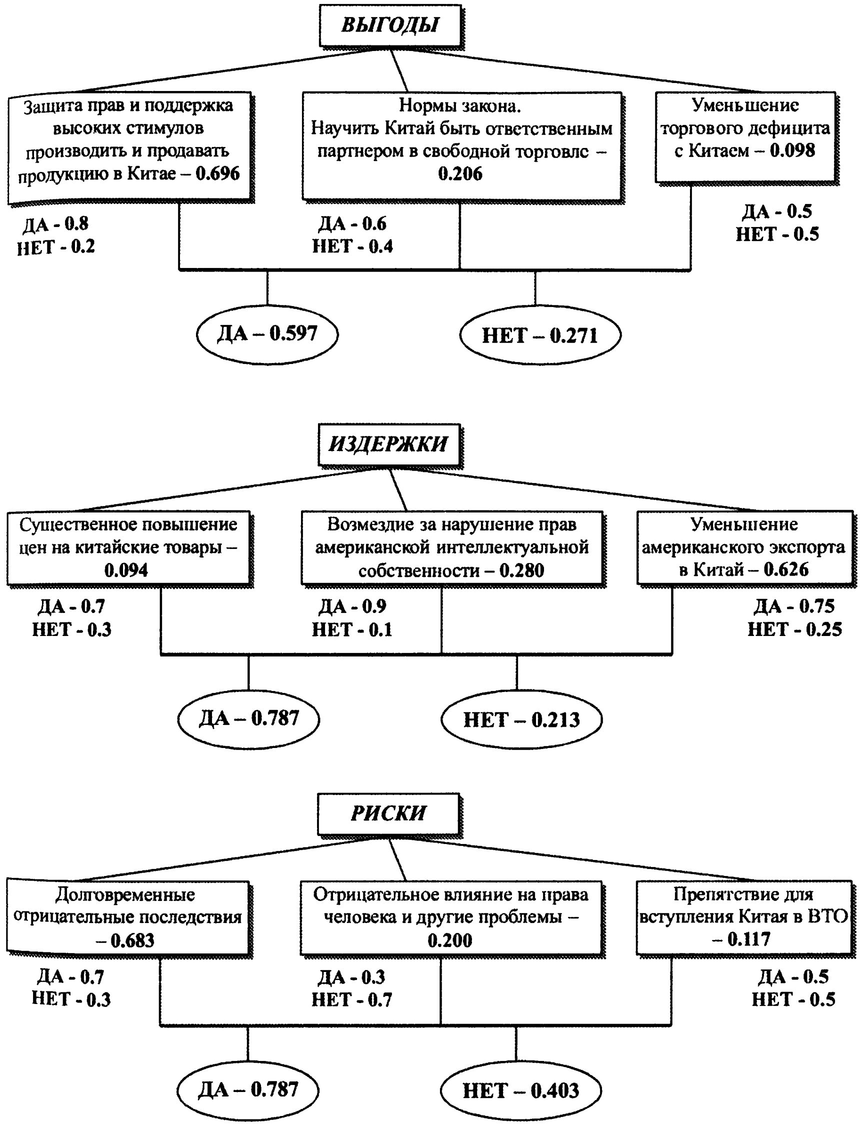


Рис. 2-5. Иерархии выгод, издержек и рисков

трем иерархиям: иерархии *Выгод* от введения экономических санкций, иерархии *Издержек* и иерархии *Рисков и неопределенностей*, которые в данном случае имеют место. Вершиной каждой иерархии является цель, за которой следует уровень критериев, влияющих на достижение цели.

Альтернативы присутствуют на нижнем, третьем уровне иерархии. Их всего две: *ДА* — положительное решение о введении санкций против Китая и *НЕТ* — отказ от введения санкций.

На следующем этапе анализа проблемы мы определили относительную важность критериев, способствующих достижению цели, сравнивая их попарно. Например, сравнивая критерии в иерархии *Выгод*, мы задавали вопрос: насколько *защита американских прав* важнее, чем *обучение Китая международным нормам сотрудничества*?

Очевидно, что с точки зрения США, защита американских прав является более важной, и что между этими двумя факторами существует зависимость. Если Китай не будет соблюдать международный закон об авторском праве, то будет украдено большее количество американских товаров. Однако если США будут уверены в том, что Китай не крадет американских технологий *know how*, они будут иметь выгоду, даже если Китай не будет строго следовать международным правилам в своих отношениях с другими странами. Для США защита американских авторских прав важнее, чем задача научить Китай отвечать за свои поступки. Поэтому мы отдали предпочтение первому критерию в этом сравнении. Остальные сравнения были сделаны на основе аналогичных рассуждений.

Шкала относительной важности факторов получена на основе парного сравнения суждений, высказанных экспертами. На следующем этапе мы переходим к третьему уровню иерархии, где выполняется сравнение альтернатив под каждым фактором (критерием). Например, в иерархии издержек альтернатива *ДА*, по мнению экспертов, абсолютно доминирует альтернативу *НЕТ* (оценка парного сравнения 9) по критерию *Возмездие за нарушение прав*. Также были получены остальные значения приоритетов альтернатив в каждой из трех иерархий. Мы сочли альтернативы *ДА* и *НЕТ* одинаково предпочтительными при сравнении по критерию *Препятствие для вступления Китая в ВТО*. Это объясняется тем, что, с американской точки зрения, независимо от решения о введении санкций Китай не готов быть членом ВТО при том уровне защиты авторских прав, патентов, и фирменных знаков, который там существует в настоящее время.

Окончательный результат получен следующим образом:

$$\frac{\textit{Выгоды}}{\textit{Издержки} \times \textit{Риски}}: \ \textit{ДА} = \frac{0.729}{0.787 \times 0.597} = 1.55, \ \ \textit{НЕТ} = \frac{0.271}{0.213 \times 0.403} = 3.16\,.$$

В каждой иерархии мы синтезируем результирующие значения для альтернатив *ДА* и *НЕТ*, умножая приоритет каждой альтернативы на важность соответствующего критерия и складывая полученные произведения по всем критериям для того, чтобы получить приоритеты альтернатив относительно фокуса иерархии. Все вычисления проводились с использованием программного обеспечения, разработанного фирмой *Expert Choice*, которое имеет дружественный пользовательский интерфейс и не требует много времени для освоения. Чтобы объединить результаты для трех иерархий, мы вычисляем приведенное выше отношение для каждой альтернативы. Лучшей альтернативой следует считать ту, для которой отношение *Выгод* к *Издержкам* и *Рискам* имеет максимальное значение. Полученный результат можно объяснить следующими соображениями. *Выгоды* положительного решения о введении санкций (*ДА*) достаточно высоки, но *Издержки* и *Риски* для этой альтернативы имеют еще более высокие значения. Отношение *Выгоды/*(*Издержки*×*Риски*) для *ДА* существенно меньше по сравнению со значением для альтернативы *НЕТ*. Отрицательное решение доминирует положительное как с учетом, так и без учета риска. Следует отметить, что анализ рисков на основе рассмотрения сценариев вероятного будущего представляет собой мощный инструмент при оценке возможных последствий решений.

Мы провели всесторонний анализ чувствительности, для того чтобы гарантировать состоятельность и обоснованность используемых суждений. Анализ чувствительности помогает ЛПР установить, каким образом возможные изменения суждений влияют на рекомендуемое решение. В этом исследовании приоритеты альтернатив были зафиксированы такими, как показано на рис. 2-5, поскольку соответствующие суждения основаны на фактах. Мы провели эксперименты, в которых изменялась важность факторов, присутствующих в иерархиях, при этом значения приоритетов факторов можно было выбирать из широкого диапазона допустимых значений, покрывающего всю область приемлемых для политиков приоритетов. Мы изменяли важность каждого фактора, заменяя его реальное значение ближайшим к нему критическим значением (0.2 или 0.8). Это дало нам по шесть модификаций для каждой иерархии, так как каждая из них содержит три фактора. На трех иерархиях было сгенерировано 216 (6 × 6 × 6) различных вариантов суждений. В результате исследования чувствительности мы определили, что только в одном случае, когда долговременные отрицательные последствия считаются незначительными, введение санкций будет оправданным. Из рис. 2-6, на котором показаны результирующие значения приоритетов для 216 вариантов, видно, что альтернатива *НЕТ* заметно доминирует *ДА*. Следовательно, независимо от значений приоритетов факторов, более чем в 90 % случаев разумным решением является отказ от введения экономических санкций против Китая.

Если торговая война станет неизбежной, и США примут решение *ДА*, то обе стороны проиграют. В этом случае не исключено, что США будут отрезаны от основных сфер китайского бизнеса, а Китай будет иметь тяжелые проблемы с вступлением в ВТО. Поскольку обе страны имеют пересекающиеся интересы в мировой политике, не исключена вероятность возникновения кратковременного военного конфликта. У США уже есть опыт ведения торговых войн с Европой и Японией, которые закончились торговыми договорами, подписанными в «последнюю минуту».

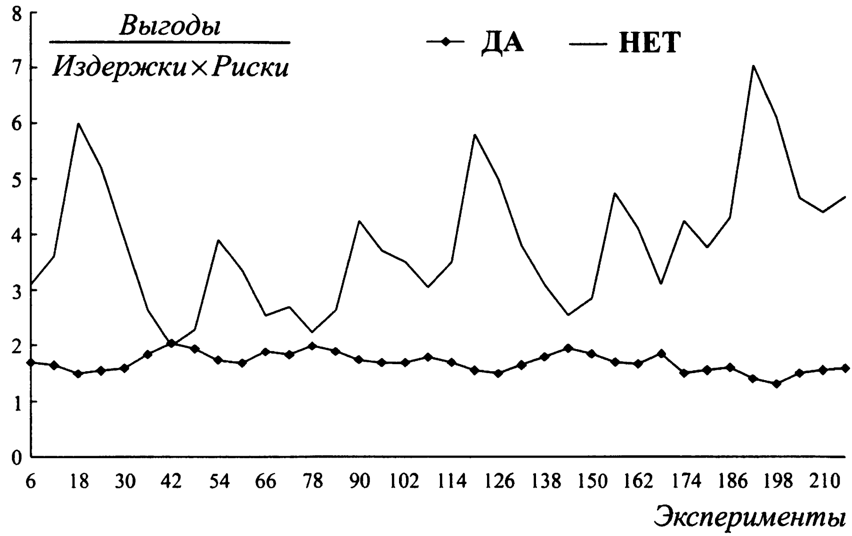


Рис. 2-6. Исследование устойчивости решений

Дэн Ронг, дочь Дэн Сяопина, самого уважаемого государственного деятеля Китая, недавно сказала: «Санкции никогда не были лучшим способом решения спора. Нужно всесторонне обсуждать проблемы и учитывать интересы людей». Проведенный нами анализ, кажется, согласуется с этим мнением.

2-9. Решение задачи о собственном векторе для вычисления весовых коэффициентов и для оценки согласованности суждений

Теперь рассмотрим некоторые технические аспекты МАИ, которые касаются вычисления приоритетов и оценки непротиворечивости суждений. Существует бесконечное число способов вычисления приоритетов из обратносимметричной матрицы парных сравнений $A = \{a_{ij}\}$, и только один из них — правильный. Это доказано математически. Необходимость выразить доминирование и оценить степень согласованности суждений приводит к задаче о собственном векторе. Корректный метод принятия решений должен иметь единственную допустимую процедуру для получения правильного ответа.

Если значение a_{ij} выражает превосходство альтернативы i над альтернативой j и a_{jk} выражает превосходство j над вариантом k, то превосходство варианта i над вариантом k, a_{ik}, должно быть равно $a_{ij}a_{jk}$ для непротиворечивых суждений. Если мы не имеем шкалы или она является неудобной, как в случае применения некоторых измерительных устройств, мы не можем задать точные значения $a_{ij} = w_i/w_j$, а можем обеспечить лишь приблизительную оценку. Собственный вектор $\boldsymbol{w}$ можно вычислить из матричного уравнения

$$\begin{pmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \cdots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \cdots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix},$$

где w_i, $i = 1, \ldots, n$, представляют собой значения из выведенной шкалы отношений. Если суждения не согласованы, то вместо решения матричного уравнения $A\boldsymbol{w} = n\boldsymbol{w}$ мы должны решить уравнение $A'\boldsymbol{w}' = \lambda_{\max}\boldsymbol{w}'$, где $\lambda_{\max}$ — максимальное собственное значение матрицы $A' = \{a'_{ij}\}$, не совпадающей с $A = \{a_{ij}\}$, при этом $a'_{ji} = 1/a'_{ij}$. Для упрощения записи в дальнейшем будем писать $A\boldsymbol{w} = \lambda_{\max}\boldsymbol{w}$, где A — матрица парных сравнений.

Решение приведенного уравнения получается путем возведения матрицы A в достаточно высокие степени с последующим суммированием строк и нормализацией (деление суммы каждой строки на сумму всех элементов матрицы), в результате чего получается вектор приоритетов $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Процесс заканчивается, когда разность между компонентами векторов приоритетов, полученных для k-й и $(k + 1)$-й степеней матрицы A становится меньше заданной точности.

Есть более простой способ вычисления приближенных значений приоритетов, который заключается в нормализации среднегеометрических значений (корень n-й степени из произведения элементов) строк матрицы парных сравнений. Результат, полученный этим способом, совпадает с главным собственным вектором для матриц с размерностью $n \leq 3$. Другой способ получения приближенных значений приоритетов — это нормализация элементов каждого столбца матрицы суждений с последующим усреднением по строкам. Самое грубое приближение можно получить путем нормирования сумм, полученных для строк матрицы.

Мы хотим предупредить читателя, что для важных приложений необходимо использовать процедуру вычисления собственного вектора, потому что грубые приближения могут привести к неверному ранжированию альтернатив и не позволяют контролировать согласованность суждений [10].

Простой способ вычисления максимального собственного числа матрицы $\lambda_{\max}$ для случая, когда известен вектор $\boldsymbol{w}$, состоит в том, чтобы сложить числа в каждом столбце матрицы парных сравнений и умножить полученный в результате вектор на нормированный вектор приоритетов $\boldsymbol{w}$.

Теперь рассмотрим вопрос, насколько хорошо главный собственный вектор w матрицы суждений представляет приоритеты? Заметим, что, если мы получаем приоритеты путем вычисления собственного вектора $w = (w_1, \ldots, w_n)^T$, то матрица, заполненная элементами w_i/w_j, является идеально согласованной и представляет собой непротиворечивую оценку исходной матрицы суждений A. Исходная матрица может быть несогласованной, более того, ее элементы могут быть даже не транзитивными; т. е. альтернатива X_1 может оказаться предпочтительнее X_2, X_2 предпочтительнее X_3, но при этом X_3 предпочтительнее X_1. Нам необходимо оценить ошибку, которая возникает из-за несогласованности суждений. Доказано, что матрица A является абсолютно согласованной тогда и только тогда, когда $\lambda_{max} = n$, и что при отклонении от идеальной согласованности $\lambda_{max} \geq n$.

Индекс согласованности матрицы парных сравнений $C.I.$ вычисляется по формуле $C.I. = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$. Интересно отметить, что $\frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$ — дисперсия ошибки, происхождение которой обусловлено неточностью оценки элементов матрицы a_{ij}. Это можно показать, представив a_{ij} в виде $a_{ij} = (w_i / w_j)\varepsilon_{ij}$; $\varepsilon_{ij} > 0$ и $\varepsilon_{ij} = 1 + \delta_{ij}$; $\delta_{ij} > -1$, и затем подставив в выражение для λ_{max}. Мы хотим оценить величину ошибки δ_{ij}, зная, что значение $|\delta_{ij}| < 1$ соответствует несмещенной оценке. Меру несогласованности следует использовать для постепенного улучшения непротиворечивости суждений. Отношение согласованности ($C.R.$) получается путем сравнения индекса $C.I.$ с соответствующим числом из множества, приведенного ниже в табл. 2-12, где каждое число представляет собой математическое ожидание случайного индекса согласованности, вычисленное на большой выборке случайно сгенерированных обратно симметричных матриц, элементами которых являются числа из шкалы: 1/9, 1/8, …, 1/2, 1, 2, …, 8, 9. Вычисленный из матрицы парных сравнений собственный вектор приемлем в том случае, если отношение $C.R. \leq 0.10$ (0.20 может допускаться, но не больше). Для матриц порядка $n = 3$ желательно выполнение условия $C.R. \leq 0.05$, и для $n = 4$ $C.R. \leq 0.08$. Если отношение согласованности превышает значение 0.10, то необходимо глубже изучить проблему и пересмотреть суждения. В МАИ имеется систематическая процедура для модификации суждений, а также способ вычисления индекса согласованности для всей иерархии.

Таблица 2-12

Таблица значений случайного индекса согласованности для матриц разной размерности

Порядок матрицы суждений n	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
Случайный индекс согласованности ($R.I.$)	0	0	.52	.89	1.11	1.25	1.35	1.40	1.45	1.49

2-10. Мультилинейные формы: нелинейность иерархической композиции

Составной приоритет каждой альтернативы на нижнем уровне иерархии можно представить с помощью мультилинейной формы

$$\sum_{i_1, i_2, \ldots i_p} x_1^{i_1} x_2^{i_2} \cdots x_p^{i_p} .$$

С учетом сказанного в разделе 2-6 рассмотрим отдельный член этой суммы, который для простоты обозначим $x_1x_2 \cdots x_p$.

$$x_1 x_2 \cdots x_p = e^{\log x_1 x_2 \cdots x_p} = \prod_{i=1}^{p} e^{\log x_i} = e^{\sum_{i=1}^{p} \log x_i} \to e^{\int \log x(\alpha) d\alpha} .$$

Сумму произведений можно записать в следующем виде:

$$x_1 x_2 \cdots x_p + y_1 y_2 \cdots y_p + \cdots + z_1 z_2 \ldots z_p \to \int_{\Lambda} e^{\omega(\lambda)} {}^{\int \log u_i du_i} d\mu(\omega(\lambda)) .$$

Этот результат полностью совпадает с тем, который получается при решении непрерывной задачи иерархической композиции с использованием собственных функций:

$$\int w_{n-1,n}(x_{n-1}, x_n) \int w_{n-2,n-1}(x_{n-2}, x_{n-1}) \cdots \int w_{1,2}(x_1, x_2) w_1(x_1) dx_1 dx_2 \cdots dx_n =$$

$$= \iint \cdots \int w_{n-1,n}(x_{n-1}, x_n) \cdots w_{1,2}(x_1, x_2) w_1(x_1) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \to$$

$$\to \iint \cdots \int e^{\sum \log w_{i-1,j}(x_{i-1}, x_j)} dx_1 \cdots dx_n \to$$

$$\to \iint \cdots \int e^{\int \log \alpha_i d\alpha_i} dx_1 \cdots dx_n \to \int_{\Lambda_1} e^{\omega(\lambda)} {}^{\int \log \alpha_i d\alpha_i} d\mu_1(\omega_1(\lambda)) \quad \lambda \in \Lambda_1 .$$

2-11. Как построить иерархию

Чтобы читатели не думали, что в МАИ можно обрабатывать только трехуровневые иерархии, предлагаем взглянуть на рис. 2-7, где приведен пример многоуровневой иерархии и вычисленных по ней приоритетов.

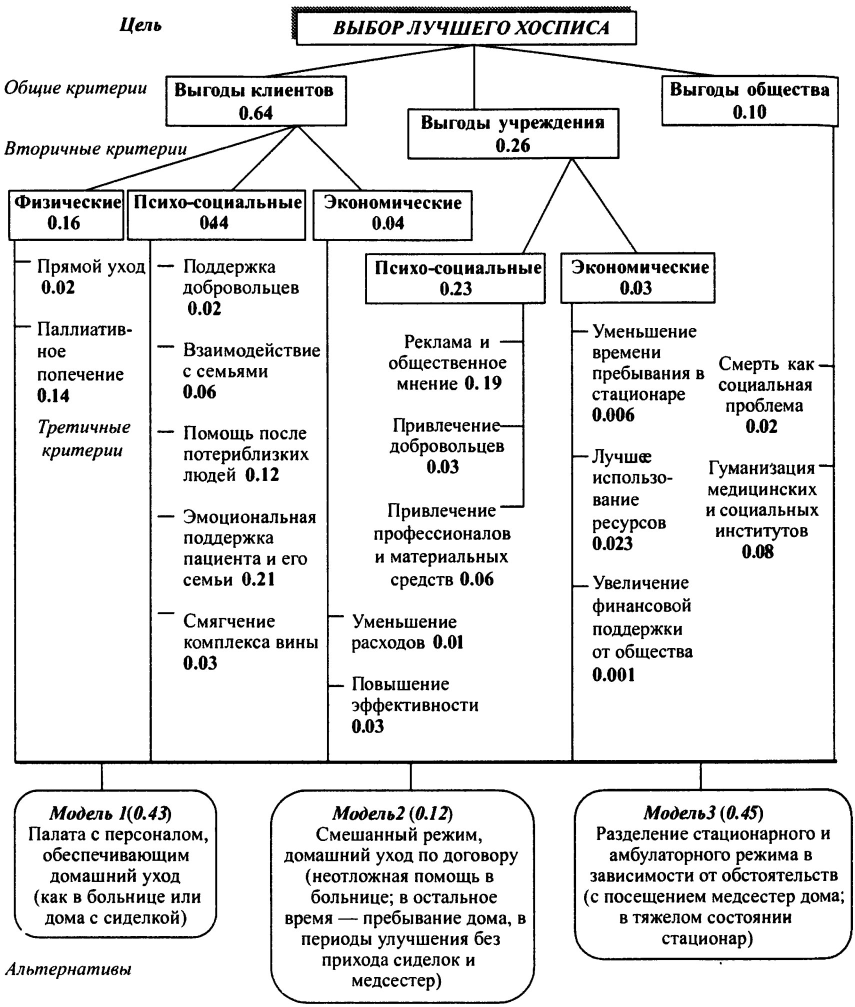


Рис. 2-7. Иерархия выгод для выбора лучшего хосписа

Мы работали над этой проблемой вместе с группой врачей, принимая решение о выборе лучшего хосписа для больных раком [11].

Самой творческой частью процесса принятия решений, которая оказывает определяющее влияние на результат, является моделирование проблемы. В МАИ проблема представляется с помощью иерархии. Затем выполняется процесс *приоритизации* (вычисление приоритетов всех элементов иерархии и выявление наиболее влиятельных элементов, имеющих максимальные значения приоритетов). Приоритизация включает процедуру выявления суждений экспертов, которые отвечают на вопросы о предпочтительности одного элемента по сравнению с другим относительно некоторого свойства (критерия, фактора). Основный принцип, которого нужно придерживаться при построении иерархий, заключается в исследовании возможности получения ответа на вопрос: можно ли выполнить значимые сравнения элементов более низкого уровня иерархии относительно некоторых или всех элементов ближайшего вышерасположенного уровня?

При построении иерархии полезно рассмотреть ее элементы сначала «сверху — вниз» от цели, а затем «снизу — вверх» от уровня альтернатив, для того чтобы правильно организовать связи между уровнями, анализируя возможность выполнения сравнений. Мы можем предложить следующие рекомендации для построения иерархии:

1. Сформулируйте главную цель. Чего вы стараетесь достигнуть? В чем главная проблема?
2. Идентифицируйте подцели главной цели. Если требуется, определите горизонты времени, которые влияют на решение.
3. Выявите критерии качества, которым должны удовлетворять альтернативы для того, чтобы достигались подцели главной цели.
4. Установите подкритерии для каждого критерия. Обратите внимание на то, что критерии или подкритерии могут быть определены через диапазоны значений параметров или в терминах вербальных интенсивностей, например *высокий, средний, низкий.*
5. Идентифицируйте акторов, вовлеченных в рассматриваемую проблему.
6. Сформулируйте цели акторов.
7. Определите возможные политики акторов.
8. Идентифицируйте альтернативы, из которых будет производиться выбор.
9. Для задач с альтернативами *Да/Нет* сравните выгоды и издержки, чтобы принять решение о совершении рассматриваемого действия, и выберите результат с максимальным приоритетом отношения *Выгоды/Издержки.*
10. Проведите анализ отношения *Выгоды/Издержки* с использованием маргинальных значений. Рассматривая иерархии предпочтения (например, иерархию выгод), постарайтесь найти ответ на вопрос, какая альтернатива приносит самую большую прибыль (пользу); при анализе издержек или рисков определите вариант с максимальными издержками (риском).

Программное обеспечение, разработанное фирмой *Expert Choice* [12], основано на методологии МАИ и предоставляет аналитику поддержку процесса структурирования иерархии, а также возможность решения проблем с использованием методов относительного или абсолютного измерения.

2-12. О чем следует помнить системным аналитикам

Результаты вычислений, выполняемых в МАИ, более адекватны реальности, если в иерархию включены все существенные для рассмотрения факторы. Математика не может полностью отвечать за правильность результатов, потому что работает с той информацией, которую кто-то заложил в иерархическую структуру.

Рассмотрим пример. На должность секретаря претендуют три кандидатуры. Одна из них хорошо владеет английским языком, но не является профессиональной машинисткой, вторая хорошо печатает, но делает грамматические ошибки, а третья представляет собой сбалансированный вариант первых двух, но ни в одном умении не превосходит остальных. Процесс синтеза приоритетов не приведет к выбору сбалансированного секретаря, если в иерархию не включить критерии «Знание языка», «Умение хорошо печатать» и «Знать язык и хорошо печатать». Таким образом, наши ожидания не могут быть удовлетворены полностью, если мы будем применять арифметические операции к произвольной структуре. Структура должна быть тщательно отработана для того, чтобы адекватно представлять все качества, которыми должно обладать решение.

2-13. Групповое принятие решений

Для выработки коллективного суждения группы экспертов, которое будет удовлетворять свойству обратной симметрии при сравнении двух объектов, следует использовать среднее геометрическое для обобщения индивидуальных суждений [13, 14]. Эта же процедура используется при объединении результатов ранжирования, полученных разными членами группы. В работе [15] приведены результаты исследования возможных способов агрегирования индивидуальных суждений и показано, что среди них немного таких, которые позволяют получить значимые утверждения с применением обобщенных функций. Основными условиями, которые должны выполняться при формировании коллективных суждений, являются симметричность, линейная однородность и согласие. Аксиома симметричности утверждает, что обобщенная функция не изменяется, если происходит взаимная замена функций, описывающих индивидуальные суждения. Аксиома согласия гласит, что, если все участники процесса принятия решений приходят к согласию, то групповое суждение согласуется со всеми индивидуальными суждениями. Линейная однородность означает, что, если каждый член группы умножает свою оценку предпочтения на некоторую константу *r*, то предпочтение группы также будет умножено на *r*. Во многих случаях среднее арифметическое и среднее геометрическое являются единственно возможными обобщенными функциями, но иногда могут применяться и другие способы. Азел и Саати [16] показали, что условиям симметричности и однородности наряду с условиями равноправия и сепарабельности (разложение группового суждения на индивидуальные) соответствует только среднее геометрическое.

В процессах голосования люди обычно используют ответы *ДА* и *НЕТ* вместо выражения реальных предпочтений. Голосование по принципу большинства может давать результат, противоположный тому, что можно было бы получить, объединяя индивидуальные приоритеты на основе среднего геометрического. Фактически МАИ позволяет объединить выгоды, издержки, возможности и риски для группы, участники которой заполняют согласованные иерархии собственными суждениями и получают индивидуальные результаты многокритериального ранжирования. При рассмотрении единственной альтернативы избиратели могут применять метод абсолютного измерения. Их индивидуальные оценки затем обобщаются путем вычисления среднего геометрического. Весьма вероятно, что полученный таким способом результат будет отличаться от результата голосования по принципу большинства, так как будет включать оценки всех избирателей, а не только тех, кто проголосовал «за». Мы надеемся, что в будущем люди научатся применять этот подход для принятия сложных коллективных решений и предпочтут его традиционному мажоритарному принципу, игнорирующему мнение меньшинства. Я уже написал доклад на эту тему с моей коллегой Джен Шанг и проиллюстрировал эту идею примером [17].

Когда группа индивидуумов желает осуществить коллективный выбор, то каждый из них должен выразить индивидуальные предпочтения, которые затем нужно объединить в выбор группы. Один из способов формирования группового выбора заключается в ранжировании альтернатив в соответствии с числом набранных голосов. Кроме этого, имеются другие способы коллективного выбора на основе индивидуальных предпочтений. Вполне разумным кажется следующее предположение: независимо от того, как мы формируем групповой выбор, если все участники предпочитают одну альтернативу другой, то группа также должна сделать такое же предпочтение. Это называется аксиомой единогласия, или оптимальностью по Парето. В случаях, когда выбор совершается более чем из двух альтернатив, групповое упорядочение может оказаться нетранзитивным, что делает невозможным определение лучшей альтернативы. Этот факт известен как парадокс Кондорсе. Французский математик восемнадцатого века де Борда предложил способ формирования коллективного предпочтения, позволяющий избежать парадокса Кондорсе, суть которого состоит в следующем: каждый индивидуум производит собственное ранжирование альтернатив, присваивая им целочисленные значения от 1 до *n*, а выбор группы осуществляется путем суммирования значений, назначенных участниками каждой альтернативе. Метод де Борда произвольно упорядочивает множество альтернатив и не приводит к парадоксам, если между выбираемыми вариантами существуют зависимости. Недостаток схемы де Борда заключается в том, что в ней предпочтения выражаются с помощью равноотстоящих чисел, в то время как одна альтернатива может оказаться сильно предпочтительной для одного человека, но слабо — для другого [7]. Кеннет Эрроу [18, 19] доказал, что рациональный выбор на основе порядковых индивидуальных предпочтений невозможен в принципе. Рациональность подразумевает выполнение следующих четырех аксиом:

1. Отсутствие диктатора: ни один из индивидуумов не определяет выбор группы.
2. Разрешимость: процедура агрегирования предпочтений должна формировать групповой выбор.
3. Парето-оптимальность: если для каждого участника A является более предпочтительной альтернативой, чем B, то это предпочтение будет сохраняться в группе.
4. Независимость от непричастных альтернатив: групповой выбор между двумя альтернативами должен быть основан на индивидуальных предпочтениях только в данной паре альтернатив.

Теорема о невозможности Эрроу утрачивает свою силу, если для выражения предпочтений используются количественные числительные, а не порядковые. Это утверждение математически доказано в докторской диссертации моей аспирантки Кирти Пенивати. Приведенные выше условия выполняются в МАИ, если для агрегирования индивидуальных предпочтений используется среднее геометрическое. Кроме того, для формирования группового выбора в МАИ можно объединять индивидуальные суждения, а не результаты индивидуального ранжирования. Если эти суждения противоречивы, участники выбора должны их скорректировать, чтобы улучшить оценки согласованности матриц парных сравнений. В этом случае результат группового ранжирования может отличаться от результата, полученного путем агрегирования глобальных векторов приоритетов, но при этом он также удовлетворяет вышеприведенным четырем аксиомам.

2-14. Метрика совместимости

В МАИ, помимо согласованности, следует учитывать совместимость полученных результатов. При обработке матрицы суждений одного индивидуума согласованность исходных суждений и их совместимость с результирующим собственным вектором тесно связаны. В групповом принятии решений понятия совместимости и согласованности различаются.

Для заданного вектора $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, где все w_i принадлежат одной и той же шкале, рассмотрим матрицу всех возможных отношений $A = (a_{ij}) = (w_i/w_j)$. Эта матрица обладает свойством обратной симметрии, т. е. $a_{ji} = 1/a_{ij}$. Произведение Адамара для обратно симметричной матрицы A и ее транспонированной матрицы A^T вычисляется как:

$$A \circ A^T = \begin{pmatrix} w_1/w_1 & \cdots & w_1/w_n \\ \vdots & & \vdots \\ w_n/w_1 & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} w_1/w_1 & \cdots & w_n/w_1 \\ \vdots & & \vdots \\ w_1/w_n & \cdots & w_n/w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} (1 \cdots 1) \equiv \boldsymbol{e}\boldsymbol{e}^T.$$

Сумму элементов матрицы A можно представить как $\boldsymbol{e}^T A \boldsymbol{e}$. В данном случае $\boldsymbol{e}^T A \circ A^T \boldsymbol{e} = n^2$.

Если предположить, что векторы $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$ и $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, компоненты которых измеряются в одной и той же шкале отношений, отличаются друг от друга матрицей возмущений (погрешностей) $E = \{\varepsilon_{ij}\}$, так что $\frac{u_i}{u_j} = \frac{w_i}{w_j}\varepsilon_{ij}$, и векторам $\boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{u}$ соответствуют матрицы $A = \left(\frac{w_i}{w_j}\right)$ и $B = \left(\frac{u_i}{u_j}\right)$, то произведение Адамара для этих матриц будет равно $A \circ B^T = E$.

Нас интересует, насколько близка величина $\boldsymbol{e}^T A \circ B^T \boldsymbol{e} = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{w_i}{w_j}\frac{u_j}{u_i}$ к ее минимальному значению n^2 или насколько близки между собой нормализованные векторы $\frac{w_i}{\sum_i w_i}$ и $\frac{u_i}{\sum_i u_i}$. Легко доказать следующие три теоремы.

Теорема 2-1: Если $A = \left(\frac{w_i}{w_j}\right)$, то $A = \boldsymbol{v}\boldsymbol{w}$, $\boldsymbol{v} = \left(\frac{1}{w_1}, \ldots, \frac{1}{w_n}\right)^T$, $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$.

Следствие: Если $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$, то $\boldsymbol{e}^T A \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{v}$.

Теорема 2-2: $\boldsymbol{e}^T A\, \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e}^T \boldsymbol{v}\boldsymbol{w}\boldsymbol{e} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{w_j} \cdot \sum_{i=1}^{n} w_i$.

Совместимость между двумя шкалами отношений w и u определяется как $c(w, u) = \boldsymbol{e}^T A \circ B^T \boldsymbol{e}$.

Шкалы отношений не имеют нулевых значений, кроме начального. Следующая теорема аналогична первой аксиоме метрики.

Теорема 2-3: $c(w, u) = n^2$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$.

Доказательство: Если $A = B$, то $A^T = B^T$ и $\boldsymbol{e}^T A \circ B^T \boldsymbol{e} = n^2$ или $c(w, \boldsymbol{u}) = n^2$. Теперь наоборот, предположим, что $c(w, u) = n^2$. Сумму элементов обратно симметричной матрицы $A \circ B^T$ можно представить с помощью двучленных слагаемых выпуклой формы $x + 1/x$, каждый из которых имеет минимальное значение 2. Так как сумма элементов равна n^2, каждый член $x + 1/x$ должен быть равен 2, что достигается тогда и только тогда, когда $x = 1$. Если мы положим $x = \dfrac{w_i}{w_j} \cdot \dfrac{u_j}{u_i}$, то из этого следует, что $\dfrac{w_i}{w_j} = \dfrac{u_i}{u_j}$ для всех i и j и, следовательно, $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}$.

Частным случаем этой теоремы является случай единственного измерения $n = 1$. Другими словами, сравнение двух шкал отношений опирается на сравнение отдельных измерений из каждой шкалы. Если мы определим $d(w, u) = \log c(w, u)$, мы получим первую аксиому обычной метрики в геометрии.

Шкалу отношений можно получить путем сравнения признаков. Что нужно делать, когда имеется только один признак, и как можно сравнить два измерения этого признака? Есть два способа получить измерение отдельного признака. Первый подразумевает относительное сравнение с известным идеальным состоянием этого признака, которое хранится в памяти. Это единственно возможный способ измерения *неосязаемых* признаков. Другой способ, применяемый, главным образом, для физических измерений, заключается в создании шкалы с единицами измерения соответствующего признака. Он является частным случаем относительного измерения. Физические измерения используют понятие расстояния и имеют более высокий уровень абстракции по сравнению с метрикой в геометрии.

Шкала физических измерений может быть шкалой отношений или может не быть таковой. В первом случае можно сформировать отношения на основе прямых измерений в этой шкале или использовать измерения для построения новой шкалы относительных измерений, а затем сформировать из них отношения через суждения. Альтернативный подход заключается в использовании различий между двумя измерениями в шкале разностей, показания которой соответствуют логарифмам измерений в шкале отношений. Таким образом, возможные способы физических измерений так или иначе связаны с фундаментальным процессом относительного измерения.

Лемма: $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)$, $a_i, b_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство: Так как оба сомножителя в правой части положительны, то левая часть неравенства включена в правую часть.

Теорема 2-4: $c(w, v) \le c(w, u)c(u, v)$.

Доказательство: Используя лемму, можно записать:

$$e^T A \circ C^T e = e^T A \circ B^T \circ B \circ C^T e \le e^T A \circ B^T e e^T B \circ C^T e = c(w, u)c(u, v).$$

Заметим, что при сравнении единственного показания в шкале отношений со стандартным значением в той же шкале мы просто берем их отношение и вычисляем произведение Адамара для двух одноэлементных матриц. Таким образом, если первое показание — p, а второе — q, то $c(p, q) = p/q$ и $d(p, q) = \log c(p, q) = \log(p/q)$. Если P и Q — векторы, заданные наборами координат в декартовом пространстве, мы можем использовать одну из многих возможных норм этого вектора, чтобы сформировать отношение p/q.

Преобразование $d(w, u) = \log c(w, u)$ для $n = 1$ удовлетворяет двум аксиомам метрики: 1) сформулированной в теореме 2-3 при $n = 1$; 2) неравенству треугольника, которое выводится из теоремы 2-4. Кроме того, легко показать, что: 3) $d(w, u) = d(u, w)$; 4) $d(w, u)$ — непрерывная функция w и u; 5) если u находится на прямой линии между w и v, тогда $d(w, v) = d(w, u) + d(w, v)$ (геодезическое свойство); и 6) $d(\alpha w, \alpha u) = d(w, u)$, $\alpha > 0$, для всех w и u (инвариантность свойств шкалы отношений). Другое преобразование $d'(w, u) = kd(w, u)$ для некоторого $k > 0$ также удовлетворяет всем приведенным выше условиям. Пространство всех w и u, наделенное метрикой $d(w, u)$, представляет собой гиперболическое пространство [20].

Как установить порог допустимого нарушения совместимости, если она определена как $e^T A \circ B^T e$? Если при делении на n^2 исходные данные имеют приемлемую оценку несогласованности, то отклонения в сторону увеличения истинных значений не более чем на один порядок величины могут рассматриваться как приемлемые. Отклонения, имеющие порядок величины такой же, что и сами значения (или больше), недопустимы. Таким образом, в качестве предельно допустимого значения совместимости можно установить 1.10. В соответствии с этим допустимое отклонение от совместимости не должно превышать 10 %.

Совместимость и согласованность

Оценка согласованности связана с совместимостью двух матриц: 1) матрицы отношений, которые сформированны из значений главного правого собственного вектора, и 2) матрицы исходных суждений, для которой вычислен собственный вектор. В процессе оценки совместимости рассматриваются два разных вектора приоритетов. Если матрица суждений не согласована, совместима ли она с матрицей отношений, которая получается из значений собственного вектора? Следующая теорема и табл. 2-13 показывают, что между согласованностью и совместимостью существует связь. Сравнение индексов согласованности и совместимости

Таблица 2-13

Отношение между согласованностью и совместимостью для матриц различной размерности

Размерность матрицы (n)	**Индекс совместимости ($S.I.$)**	λ_{max}	$C.I. = \frac{\lambda_{max} - n}{n-1}$	***R.I.***	$C.R. = \frac{C.I.}{R.I.}$
3	1.017	3.052	0.026	0.52	0.05
4	1.053	4.214	0.071	0.89	0.08
5	1.089	5.444	0.111	1.11	0.10
6	1.104	6.625	0.125	1.25	0.10
7	1.116	7.810	0.135	1.35	0.10
8	1.123	8.980	0.140	1.40	0.10
9	1.129	10.160	0.145	1.45	0.10
10	1.134	11.341	0.149	1.49	0.10
11	1.137	12.510	0.151	1.51	0.10
12	1.141	13.694	0.154	1.54	0.10
13	1.144	14.872	0.156	1.56	0.10
14	1.146	16.041	0.157	1.57	0.10
15	1.147	17.212	0.158	1.58	0.10

показывает, что для матриц с размерностью $n = 3, 4, 5$ индекс совместимости должен иметь значение меньше, чем 1.10.

Пусть $W = (w_i/w_j)$ — матрица отношений, сформированная из значений главного правого собственного вектора $\boldsymbol{w} = (w_1, \ldots, w_n)$, вычисленного для положительной обратно симметричной матрицы A, и λ_{max} — главное собственное значение A, и пусть $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Индекс совместимости матрицы суждений A и матрицы отношений W, полученной на основе значений собственного вектора, определим как $S.I. = \frac{1}{n^2} \boldsymbol{e}^T A \circ W^T \boldsymbol{e}$.

Теорема 2-5: $\frac{1}{n^2} \boldsymbol{e}^T A \circ W^T \boldsymbol{e} = \frac{\lambda_{max}}{n}$.

Доказательство: Из $A\boldsymbol{w} = \lambda_{max}\boldsymbol{w}$ имеем:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = \lambda_{max} w_i \text{ и } \frac{1}{n^2} \boldsymbol{e}^T A \circ W^T \boldsymbol{e} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = \frac{\lambda_{max}}{n}.$$

В табл. 2-13 приведена информация о совместимости и согласованности матриц суждений с разной размерностью.

Примеры

Рассмотрим произведение Адамара двух следующих матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/5 \\ 3 & 1 & 3/5 \\ 5 & 5/3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 4/5 \\ 3/2 & 1 & 6/5 \\ 5/4 & 5/6 & 1 \end{pmatrix}.$$

В качестве оценки совместимости будем иметь:

$$\frac{1}{n^2} e^T A \circ B^T e = \frac{9\frac{1}{4}}{9} = 1.028\,.$$

Векторы приоритетов в шкале отношений, соответствующие двум приведенным матрицам, имеют вид $\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)^T$ и $\left(\frac{3}{4.6}, \frac{1}{4.6}, \frac{0.6}{4.6}\right)^T$, и в соответствии с полученной оценкой считаются близкими.

Рассмотрим другой пример:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/9 \\ 3 & 1 & 1/3 \\ 9 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 4/9 \\ 3/2 & 1 & 2/3 \\ 9/4 & 3/2 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда имеем $\frac{1}{n^2} e^T A \circ B^T e = \frac{10\frac{1}{36}}{9} = 1.114\,.$

Векторы в шкале отношений в этом случае равны $\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)^T$ и $\left(\frac{9}{13}, \frac{3}{13}, \frac{1}{13}\right)^T$, а мера их близости имеет пороговое значение.

Пример несогласованной матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 1/9 & 1 \\ 9 & 1 & 9 \\ 1 & 1/9 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2/9 & 4 \\ 9/2 & 1 & 18 \\ 1/4 & 1/18 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда $\frac{1}{n^2} e^T A \circ B^T e = \frac{30.027}{9} = 3.336\,.$

Векторы в шкале отношений для двух приведенных матриц имеют вид $\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)^T$ и $\left(\frac{1}{11}, \frac{9}{11}, \frac{1}{11}\right)^T$.

Они не могут считаться близкими в соответствии с полученной оценкой. Заметим также, что для произведения

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 16 \\ 1/4 & 1 & 4 \\ 1/16 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}$$

мы имеем $\frac{1}{n^2} \boldsymbol{e}^T A \circ B^T \boldsymbol{e} = \frac{27\frac{9}{16}}{9} = 3.063$.

Следовательно, векторы для матриц A и B $\left(\frac{4}{7}, \frac{2}{7}, \frac{1}{7}\right)^T$ и $\left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)^T$ не являются близкими.

В заключение рассмотрим два примера для матриц с размерностью 4×4, сформированных с целью проверки совместимости вектора $(0.05, 0.15, 0.30, 0.50)^{\mathrm{T}}$ со следующими двумя векторами:

а) с вектором $(0.08, 0.22, 0.25, 0.45)^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{0.05}{0.15} & \frac{0.05}{0.30} & \frac{0.05}{0.50} \\ \frac{0.15}{0.05} & 1 & \frac{0.15}{0.30} & \frac{0.15}{0.50} \\ \frac{0.30}{0.05} & \frac{0.30}{0.15} & 1 & \frac{0.30}{0.50} \\ \frac{0.50}{0.05} & \frac{0.50}{0.15} & \frac{0.50}{0.30} & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \frac{0.22}{0.08} & \frac{0.25}{0.08} & \frac{0.45}{0.08} \\ \frac{0.08}{0.22} & 1 & \frac{0.25}{0.22} & \frac{0.45}{0.22} \\ \frac{0.08}{0.25} & \frac{0.22}{0.25} & 1 & \frac{0.45}{0.25} \\ \frac{0.08}{0.45} & \frac{0.22}{0.45} & \frac{0.25}{0.45} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 & 0.92 & 0.52 & 0.56 \\ 1.09 & 1.00 & 0.57 & 0.61 \\ 1.92 & 1.76 & 1.00 & 1.08 \\ 1.77 & 1.63 & 0.93 & 1.00 \end{pmatrix}.$$

Индекс совместимости имеет значение $\frac{1}{n^2} e^T A \circ B^T e = \frac{17.36}{16} = 1.085$, которое приемлемо.

б) с вектором $(0.03, 0.25, 0.10, 0.62)^{\mathrm{T}}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{0.05}{0.15} & \frac{0.05}{0.30} & \frac{0.05}{0.50} \\ \frac{0.15}{0.05} & 1 & \frac{0.15}{0.30} & \frac{0.15}{0.50} \\ \frac{0.30}{0.05} & \frac{0.30}{0.15} & 1 & \frac{0.30}{0.50} \\ \frac{0.50}{0.05} & \frac{0.50}{0.15} & \frac{0.50}{0.30} & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & \frac{0.25}{0.03} & \frac{0.10}{0.03} & \frac{0.62}{0.03} \\ \frac{0.03}{0.25} & 1 & \frac{0.10}{0.25} & \frac{0.62}{0.25} \\ \frac{0.03}{0.10} & \frac{0.25}{0.10} & 1 & \frac{0.62}{0.10} \\ \frac{0.03}{0.62} & \frac{0.25}{0.62} & \frac{0.10}{0.62} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.00 & 2.77 & 0.55 & 2.07 \\ 0.36 & 1.00 & 0.20 & 0.74 \\ 1.80 & 5.00 & 1.00 & 3.72 \\ 0.48 & 1.34 & 0.27 & 1.00 \end{pmatrix}.$$

Индекс совместимости равен $\frac{1}{n^2} e^T A \circ B^T e = \frac{22.99}{16} = 1.437$ и выходит за предел допустимых значений.

Использование нескольких шкал отношений

Рассмотрим два вектора $P = (p_1, \ldots, p_n)$ и $Q = (q_1, \ldots, q_n)$, компоненты которых представляют собой показания, измеренные в n разных шкалах, например эти векторы могут содержать результаты различных анализов пациента, сделанные в разное время. Как можем мы судить о близости P и Q? Одним из возможных способов является вычисление суммы $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i}{q_i}+\frac{q_i}{p_i}\right)$ и оценка ее близости к единице. Если измеряемые свойства имеют разные приоритеты, которые мы можем определить, вычислив нормированный вектор $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ матрицы парных сравнений, то следует проанализировать, насколько близким к единице является значение выражения $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\left(\frac{p_i}{q_i}+\frac{q_i}{p_i}\right)$.

Если для каждого свойства мы имеем несколько измерений, то можно применить способ анализа измерений единственного признака для каждого из свойств, а затем сложить результаты измерений и потребовать, чтобы их сумма не превышала значения 1.10. Для смешанного вектора, содержащего измерения различных свойств, часть из которых измерена в одной и той же шкале отношений, мы сравниваем такие измерения как раньше. В заключение мы суммируем индексы совместимости, полученные для различных шкал, и берем их среднее в качестве обобщенной оценки, которая не должна превышать значение 1.10.

Приведенные рассуждения основаны на допущении о взаимной независимости измерений. Если между свойствами существуют зависимости, то их можно частично учесть с помощью весовых коэффициентов α, упомянутых выше. Измерения из нескольких различных шкал отношений могут перемножаться с целью формирования новой шкалы отношений. Полученное произведение $p_1 p_2 \cdots p_n$ можно сравнить с соответствующим произведением $q_1 q_2 \cdots q_n$, используя выражение

$$\frac{1}{2}\left[\frac{p_1 p_2 \cdots p_n}{q_1 q_2 \cdots q_n}+\frac{q_1 q_2 \cdots q_n}{p_1 p_2 \cdots p_n}\right],$$

значение которого должно быть близким к единице.

Приложения совместимости

Совместимость можно использовать для оценки близости результата ранжирования альтернатив, выполненного одним ЛПР, к результату группового ранжирования. Последнее может быть получено путем вычисления среднего геометрического векторов глобальных приоритетов нескольких индивидуумов. На основе оценки совместимости матрицы отношений каждого индивидуума с матрицей отношений группы участникам процесса принятия решения, мнения которых имеют наибольшую степень несовместимости, можно рекомендовать изменить высказанные предпочтения в сторону улучшения индекса совместимости. Пересмотр суждений и повторные вычисления результата группового ранжирования позволяют постепенно прийти к решению, которое приемлемо для всех участников (ЛПР). Этот подход может также применяться для проверки совместимости индивидуальных результатов с групповым в том случае, когда происходит объединение индивидуальных суждений для каждой матрицы парных сравнений. При этом существует возможность управления процессом согласования суждений экспертов.

2-15. МАИ и линейное программирование

МАИ — это процесс, который позволяет представить сложную многокритериальную проблему в виде обобщенной безразмерной шкалы приоритетов. Известно, что для того чтобы можно было судить об измерениях, их необходимо связать с нашей системой ценностей, которые выражаются с помощью оценок важности или предпочтительности. В МАИ вычисляются приоритеты, определяющие относительные шкалы в многомерном пространстве признаков, которое декомпозируется с помощью иерархии целей, критериев и подкритериев с последующим синтезом обобщенной шкалы приоритетов на этой иерархии. Мы можем преобразовывать показания измерений в соответствующие приоритеты настолько, насколько способны понимать эти величины в свете нашей системы ценностей. Мы научились приводить многомерные шкалы к одной безразмерной шкале, но мы не можем выполнить обратное преобразование. Может быть, кто-нибудь в будущем придумает способ определения отношений, с помощью которых можно будет преобразовать шкалу обобщенных безразмерных приоритетов к многомерным измерениям.

Линейное программирование (ЛП) — метод оптимизации линейных функций многих переменных. Существует ли какая-нибудь связь между этим методом и МАИ?

Задача линейного программирования имеет вид

$$\max \boldsymbol{cx}$$

при заданных ограничениях $\boldsymbol{b}_2 \le A\boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}_1$; $\boldsymbol{x} \ge 0$.

Условия неотрицательности, налагаемые на переменные, позволяют надеяться на возможность получения результатов в шкале отношений. В некоторых задачах ЛП необходимо найти оптимальный результат, содержащий неопределенности, путем исследования большого числа возможных комбинаций. Метод линейного программирования хорошо работает только с абсолютными количественными измерениями, но мы хотим его применить для задач, включающих относительные измерения неосязаемых величин.

Применяя МАИ, необходимо выполнять два типа парных сравнений. Первый тип — это сравнения альтернатив, представленных неизвестными x_i, относительно критериев и подкритериев. На основе этих сравнений получается вектор целевой функции $\boldsymbol{c}$ и коэффициенты матрицы ограничений A. Например, мы можем попарно сравнивать альтернативы по выгодам и издержкам, стремясь соответственно к максимизации или минимизации. Второй тип парных сравнений связан с выявлением важности критериев и/или подкритериев. Например, рассматривая проблему выбора диеты, мы можем сравнивать относительный вклад различных критериев в здоровье. Таким образом можно сформировать левые части ограничений для каждого критерия. Приоритеты критериев используются в качестве весовых коэффициентов элементов матрицы A.

Каждое ограничение имеет верхний и нижний пределы, представленные векторами $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$ соответственно, которые могут, например, обозначать максимально и минимально допустимое количество питательного вещества в задаче о диете. Заметим, что мы можем поделить каждое двустороннее неравенство на сумму всех верхних границ (коэффициенты $\boldsymbol{b}_1$), приводя правые части к относительным величинам. Если мы затем умножим и разделим левые части неравенств на сумму коэффициентов $\boldsymbol{b}_2$, мы получим нормированные значения коэффициентов, умноженные на константу, которая является отношением суммы коэффициентов $\boldsymbol{b}_2$ к сумме коэффициентов $\boldsymbol{b}_1$. Все компоненты вектора неизвестных $\boldsymbol{x}$ в средней части неравенства также необходимо разделить на сумму коэффициентов $\boldsymbol{b}_1$. При этом возникает вопрос: как определить относительные значения верхней и нижней границ для каждого критерия? В задаче о диете следует рассмотреть конкретного индивидуума с учетом его возраста, веса, роста и уровня физической активности и затем определить относительные значения всех типов требуемых питательных веществ. Иерархия необходима здесь для того, чтобы оценить относительные количества питательных веществ, в которых нуждается человек для улучшения здоровья в соответствие с его весом, способностью его клеток к регенерации, внешностью, уровнем затрачиваемой энергии (калории), выносливостью, иммунитетом (витамины), и температурной резистентностью (жиры). Мы должны подобрать необходимые количества углеводов, белков и минералов, анализируя различные злаки, мясо, овощи и фрукты. Сравнивая их попарно, мы получим относительные числа. Результирующий вектор отношений затем необходимо преобразовать к абсолютным значениям b_1, умножив на некоторую константу. Как ее подобрать?

Отметим, что, так как мы определили коэффициенты b_1 через отношения, то при их умножении на константу следует каждую переменную x в левой части неравенства умножить на ту же константу. Таким образом мы получим решение задачи ЛП в шкале отношений. Для получения абсолютных значений можно пропорционально увеличивать полученные значения неизвестных x_i до тех пор, пока не будет достигнут некоторый уровень *удовлетворительности*. Идея Герберта Саймона об *удовлетворительности* получила строгое научное обоснование в этом ракурсе, потому что определение значений b_1 выполняется на основе информации, специфической для каждого конкретного случая, и не зависит от математической структуры задачи. Только пропорциональность значений переменных является характерным для них свойством. Следовательно, линейное программирование приводит к неоднозначным решениям при использовании шкал отношений и имеет тесную связь с МАИ. Анализ проблемы двойственности в линейном программировании дает дальнейшее подтверждение изложенным наблюдениям.

Пример

Упомянутая выше проблема диеты — удачная иллюстрация того, как можно использовать суждения, основанные на опыте, для постановки задач линейного программирования. Наша цель заключается в измерении неосязаемых свойств объектов реального мира с использованием методов измерения осязаемых величин. Предположим, что мы располагаем информацией, приведенной в табл. 2-14, решая задачу выбора из девяти пищевых продуктов, преследуя цель подобрать ежедневную диету, которая имеет минимальные издержки и удовлетворят трем ограничениям (столбец b_1): 1) на число калорий, получаемых из углеводов, 2) на количество белков и 3) на количество жиров. Издержки определяются иерархией с тремя критериями: *Цена*, *Вкус*, и *Время приготовления*, приоритеты которых получены из матрицы парных сравнений и соответственно равны 0.674, 0.226, и 0.101. Значения, приведенные в табл. 2-14, получены на основе фактической стоимости единицы каждого продукта, а также значений по критериям *Вкус* и *Время приготовления*, вычисленных на основе экспертных суждений. Приоритеты в столбце b_1 также были получены на основе парных сравнений, сделанных врачом-диетологом. Приоритеты оказались очень близкими к известным фактическим данным, поэтому мы используем относительные значения последних для большей точности. Основная проблема состоит в том, чтобы определить коэффициенты a_{ij} для каждого пищевого продукта в уравнении целевой функции и в каждом из трех ограничений. Значения в табл. 2-14 взяты из литературных источников и выражены числом калорий, содержащихся в 100 граммах продукта.

Таблица 2-14

Задача о диете с использованием не измеряемых данных

Продукты	Сыр	Рыба	Маргарин	Цыпленок	Хлопья	Яйца	Овощи	Хлеб	Молоко	b_i
Переменные	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	
Издержки	0.218	0.199	0.122	0.113	0.099	0.092	0.078	0.044	0.034	
Углеводы	0	0	0	0	252	0	32	240	20	0.58
Белки	88	80	0	8	52	48	4	40	12	0.30
Жиры	216	27	900	45	36	108	0	0	27	0.12
Решение	0	0.001	0	0	0	0.001	0	0.002	0	
Абсолютное	0	242.6	0	0	0	194.89	0	555.83	0	

Это дает нам возможность преобразовать результирующее относительное решение задачи линейного программирования к абсолютным значениям, умножив его на 100 и на 2300 (максимальное число калорий в день).

Теперь рассмотрим, как можно получить коэффициенты матрицы ограничений a_{ij} через парные сравнения. Опытный исследователь, очевидно, мог бы получить значения a_{ij} из экспериментов, в которых продукты сравнивались бы по количеству полученной из них энергии. Кроме того, можно провести сравнение продуктов по влиянию на тонус мышц, который они обеспечивают благодаря белкам, а также по вкладу, который они вносят в размер органов тела и величину жировой прослойки. Конечно, в данной задаче у нас есть измеренные значения, и мы не нуждаемся в упражнениях такого рода, но в действительности могут встречаться задачи, содержащие неизмеряемые критерии, для которых необходимо будет сделать нечто подобное. Более того, все эти критерии можно объединить в единую иерархию и упорядочить в соответствии с приоритетами согласно их вкладу в общее состояние здоровья человека. Синтез обобщенных приоритетов на иерархии даст глобальный вектор коэффициентов a_{ij} для одного неравенства. Коэффициент b_1 для этого неравенства также следует получить путем аддитивной композиции приоритетов. В этом случае задача линейного программирования сводится к более простой постановке, включающей единственное ограничение.

Мы не рекомендуем применять эту процедуру на практике, потому что она основана на предположении о взаимозаменяемости всех ограничений, которое в данном случае неуместно. В задаче линейного программирования предполагается, что все ограничения имеют равную силу и должны обязательно удовлетворяться. Мы показали, что при использовании иерархии ограничения могут иметь различный вес и могут быть объединены, а сложность исходной задачи уменьшена, по крайней мере теоретически. Этот тезис, вероятно, требует дальнейшего исследования с тем, чтобы выяснить его значимость и универсальность. Применив МАИ для решения проблемы диеты, мы определили бы один предпочтительный пищевой продукт, который наилучшим образом соответствует требованиям, при этом некоторые требования могли остаться неудовлетворенными.

2-16. Применение в промышленности и управлении

МАИ применяется во многих областях. Например, он широко используется в экономике и управлении для аудита, для выбора информации из баз данных, в процессах проектирования, финансового анализа, макроэкономического прогнозирования, маркетинга (выбор сегментов потребительского рынка, проектирование и развитие производства, выбор стратегий), планирования, для выбора кандидатов на должность, для задач размещения оборудования и средств, распределения ресурсов (бюджет, энергия, здоровье и т. д.), для выбора согласованных решений, прогнозирования политических стратегий, а также в задачах перевозки товаров, при анализе эффективности и т. д. В политике МАИ применяется при решении проблем контроля над вооружениями, разрешения конфликтов путем переговоров, анализа кандидатур политиков, оценки уровня безопасности, вероятности возникновения военных конфликтов и степеней мирового влияния. В социальной сфере МАИ нашел применение в образовании, экологии, здравоохранении, юриспруденции, медицине (эффективность лекарственных средств, выбор терапии), для анализа поведения в условиях конкуренции, для анализа миграции населения (способы межрегиональной миграции, размер популяций), а также для решения других социальных проблем. Технические приложения МАИ включают выбор рынков, выбор сложных альтернатив, выбор перспективных технологий и т. п.

Пример: Нужно ли строить стадион

Существенное значение в МАИ имеет декомпозиция рассматриваемой задачи в терминах выгод, возможностей, издержек и рисков. Может оказаться так, что использование некоторых, но не всех этих аспектов, приведет к результату, который будет отличаться от решения, в котором учитываются все названные факторы. Такой подход применялся для решения вопроса о строительстве нового стадиона бейсбольным клубом. Иерархия выгод включала экономический и социальный критерии. Экономический критерий детализировался следующим набором подкритериев: *Использование для нужд города*, *Привлечение средств из фондов* и *Налогообложение строительства*. Социальный критерий был описан следующими подкритериями: *Статус первоклассного города*, *Солидарность* *граждан, Отдых и развлечения*. Иерархия возможностей содержит критерии: *Сохранение городской бейсбольной команды, Дополнительные рабочие места, Развитие бизнеса, Освоение неиспользуемой территории города, Проведение спортивных игр*, а также концертов и торжественных мероприятий. Иерархия издержек включает критерии: *Увеличение налогов* на граждан, *Модификация инфраструктуры* для оборудования нового стадиона, *Уменьшение финансирования других программ, Стоимость земли* для нового стадиона и *Потеря доходов от старого стадиона*. В иерархию рисков включены критерии: *Снижение престижа города, Команда может покинуть город* в будущем, *Отсутствие гражданской солидарности*, так как избиратели отчуждены от процесса строительства, *Долги*, которые придется отдавать местным органам власти, *Появление новых социальных проблем*, например автостоянка и преступность. Проведенный анализ дал следующие результаты (табл. 2-15).

Таблица 2-15

	Выгоды	**Возможности**	**Издержки**	**Риски**	*Выгоды / Изд-жки*	*Выгоды / Изд-жки × Риски*	*Выгоды × Возм-сти / Изд-жки × Риски*
Строить	0.696	0.815	0.769	0.576	0.905	1.571	1.280
Не строить	0.304	0.185	0.231	0.424	1.310	3.104	0.574

В заключение отметим, что новый стадион (в Питтсбурге) был все же построен. Если бы рассматривались только выгоды, или выгоды и издержки, или выгоды, издержки и риски, то рекомендуемым решением был бы отказ от строительства стадиона. Учет возможностей в данном случае изменил конечное решение.

Другие приложения МАИ приведены работах [21–24].

Литература

1. *Saaty T. L. and Kearns K. P.* Analytical Planning: The Organization of Systems // International Series in Modern Applied Mathematics and Computer Science, 7. Oxford, England: Pergamon Press, 1985.
2. *Saaty T. L.* The Analytical Hierarchy Process. Pittsburgh, PA: RWS Publications, 1990 (first published: New York: McGraw Hill, 1980).
3. *Saaty T. L. and Alexander J.* Conflict Resolution. New York: Praeger, 1989.
4. *Saaty T. L. and Vargas L. G.* Prediction, Projection and Forecasting. Boston: Kluwer Academic, 1991.

5. *Saaty T. L. and Vargas L. G.* A Model of Neural Impulse Firing and Synthesis // Journal of Mathematical Psychology. 1993. 37. P. 200–219.
6. *Saaty T. L.* What is Relative Measurement? The Ratio Scale Phantom // Mathematical and Computer Modelling. 1993. 17/4–5. P. 1–12.
7. *Saaty T. L.* Fundamentals of Decision Making and Priority Theory. RWS Publications, 4922 Ellsworth Ave., Pittsburgh, PA, 1994.
8. *Saaty T. L., France J. W. and Valentine K. R.* Modeling the Graduate Business School Admissions Process // Socio-Economic Planning Sciences. 1991. 25/2. P. 155–162.
9. *Tversky A., Slovic P. and Kahneman D.* The Causes of Preference Reversal // The American Economic Review. 1990. 80/1. P. 204–215.
10. *Saaty T. L. and Vargas L. G.* The Logic of Priorities, Applications in Business, Energy, Health, Transportation. Boston: Kluwer-Nijhoff Publishing, 1982.
11. *Saaty T. L.* How to Make a Decision: The Analytic Hierarchy Process // Interfaces. 1994. 24/6. P. 19–43.
12. Expert Choice Software / Expert Choice, Inc. 4922 Ellsworth Ave., Pittsburgh, PA 15213, 1993.
13. *Schrage M.* No More Teams! Mastering the Dynamics of Creative Collaboration. New York: Currency Doubleday, 1995.
14. *Guzzo R. A., E. Salas, et. al.* Team Effectiveness and Decision Making in Organizations. San Francisco, CA: Jossey-Bass Inc., 1995.
15. *Aczel J. and Roberts F. S.* On the Possible Merging Functions // Mathematical Social Sciences. 1989. 17. P. 205–243.
16. *Aczel J. and Saaty T. L.* Procedures for Synthesizing Ratio Scale Judgments // Journal of Mathematical Psychology. 1983. 27. P. 93–102.
17. *Saaty T. L. and Shang J. S.* The Analytic Hierarchy Process and he Voting System // Proceedings of the Fourth International Symposium on the Analytic Hierarchy Process, July 12–15, Simon Fraser University, Vancouver, 1996. B. C. 505–517 (Request copies of Proceedings from www.expertchoice.com).
18. *Fishburn P. C.* The Theory of Social Choice. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1973.
19. *Fishburn P. C.* Multiperson Decision Making: A Selective Review. Chapter 1 in: Multiperson Decision Making Using Fuzzy Sets and Possibility Theory / J. Kacprzyk and M. Fedrizzi (eds.). Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1990. P. 3–27.
20. *Lyndon R. C.* Groups and geometry // London Mathematical Society Lecture Note Series 101. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1985.
21. *Golden B. L., Harker P. T. and Wasil E. A.* Applications of the Analytic Hierarchy Process. Berlin: Springer-Verlag, 1989.
22. *Dyer R. F. and Forman E. H.* An Analytic Framework for Marketing Decisions: Text and Cases. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1989.
23. *Saaty T. L. and Vargas L. G.* Decision Making in Economic, Political, Social and Technological Environments. RWS Publications, 4922 Ellsworth Ave., Pittsburgh, PA, 1994.
24. *Saaty T. L.* Decision Making for Leaders. RWS Publications, 4922 Ellsworth Ave, Pittsburgh, PA, 1999.

Глава 3

Сети с обратными связями

3-1. Введение

Многие проблемы принятия решений нельзя представить иерархическими структурами, потому что в них существуют зависимости и взаимодействия между элементами разных уровней иерархии. Существуют задачи, в которых не только важность критериев влияет на приоритеты альтернатив (как в иерархиях), но также важность альтернатив влияет на приоритеты критериев. Например, выбирая конструкцию моста и рассматривая при этом две альтернативы, мы можем руководствоваться двумя критериями: прочностью и красотой. Допустим, что оба моста обладают достаточной прочностью, но тот, который прочнее, некрасив. Возможно, что именно он будет выбран в качестве лучшего решения, если не учитывать влияния альтернатив на важность критериев. Это влияние проявляется в том, что критерий «прочность» получает меньший приоритет, поскольку оба моста являются прочными, поэтому критерий «красота» становится более важным. Обратная связь позволяет нам ввести в структуру принятия решения фактор, учитывающий будущее, и определить политики достижения желаемого будущего.

Структуры решений с обратными связями нельзя линейно упорядочить сверху донизу, они представляют собой сети, содержащие циклы и множества элементов (компоненты), которые мы больше не можем называть уровнями, а также петли обратной связи, показывающие связь между элементами одного компонента. Сеть может включать компоненты-источники и компоненты-стоки. *Узел-источник* является началом маршрутов влияния и не может быть точкой завершения какого-либо маршрута. *Узел-сток* является точкой завершения одного или нескольких маршрутов и не может быть началом какого-либо пути. Полная сеть может включать узлы-источники, узлы-стоки и промежуточные узлы, расположенные между источниками и стоками, а также в циклах. Некоторые сети могут содержать только источники и стоки, в то время как другие могут включать только источники и узлы-циклы (с петлей обратной связи) или узлы-циклы и узлы-стоки, или только узлы-циклы. Проблемы принятия решений, включающие обратные связи, часто возникают на практике. Они могут быть представлены сетями любого вида. Определение приоритетов элементов в сети, в частности, альтернатив решений, представляет собой сложную проблему. Поскольку наличие обратных связей приводит к возникновению циклов, и, следовательно, бесконечных маршрутов, то возникает необходимость применения более сложного, чем в МАИ, алгоритма вычисления приоритетов. Решение сетевых задач требует изобретательности и применения вычислений с высокой точностью.

В настоящее время, стараясь преодолеть сложность и упростить реальные задачи, люди, работающие в области принятия решений, чаще всего применяют простейшие иерархические структуры, состоящие из цели, критериев и альтернатив. Однако решения, полученные на простой трехуровневой иерархии, могут отличаться от решений, полученных на более сложной иерархии. В свою очередь, решения, полученные на сети, могут существенно отличаться от решений, полученных даже на сложной иерархии. Трудно надеяться на то, что искусственное преодоление сложности путем сведения реальной задачи к примитивной структуре позволит получить результат взаимодействия между элементами проблемы в концентрированной форме обобщенных суждений, которые правильно отражают действительность. Мы должны научиться представлять эти суждения сложными структурами, которые адекватно отражают реальность, и организовывать наши рассуждения и вычисления изощренными и в то же время простыми способами, чтобы достичь понимания сложности окружающего мира. Опыт показывает, что это вполне возможно, хотя и требует определенных затрат труда и времени. *Главное преимущество сетей с обратными связями — возможность получения решений, которые позволяют предвидеть будущее.*

Чтобы проверить элементы, например критерии, на взаимную независимость, можно поступить следующим образом: постройте матрицу парных сравнений критериев и заполните ее числами 1 и 0, используя единицу для того, чтобы показать зависимость одного критерия от другого, и нуль в противном случае. При этом не требуется проверка на зависимость критерия от самого себя. Для каждого столбца полученной матрицы постройте матрицу парных сравнений только для зависимых критериев, вычислите собственный вектор и дополните его нулями, которые соответствуют исключенным критериям. Если столбец состоит из одних нулей, то приоритеты влияния представляются нулевым вектором. При парном сравнении критериев каждого столбца первой матрицы следует задавать вопрос: какой из двух сравниваемых критериев в большей степени зависит от критерия, соответствующего столбцу, с точки зрения сформулированной цели или критерия более высокого уровня иерархии?

В этой главе мы рассмотрим теоретические основы обработки структур с обратными связями, в том числе вопросы построения сетевых структур, формирования матриц, применения шкал отношений и способов вычисления приоритетов.

3-2. Суперматрица сетевой задачи

Предположим, что мы имеем систему из N компонентов, в которой элементы в каждом компоненте взаимодействуют между собой и влияют на некоторые или все элементы другого компонента относительно свойства (критерия), управляющего взаимодействиями в системе, который может иметь технологический, экономический или политический смысл (рис. 3-1). Заметим, что сеть, объединяющая компоненты системы принятия решений, всегда должна быть связной, т. е. она не должна быть разделена на отдельные части, так как тогда не имеет смысла говорить о влиянии несвязанных частей друг на друга. На рис. 3-1 представлены три вида компонентов.

Компоненты, не имеющие входящих дуг, называются *компонентами-источниками* (C_1 и C_2). Компоненты, не имеющие исходящих дуг, называются *стоками* (C_5); и, наконец, те компоненты, которые имеют входящие и исходящие дуги, будем называть *промежуточными* или *переходными* (C_3 и C_4). Кроме того, C_3 и C_4 образуют *цикл* из двух компонентов, так как между ними существует двунаправленная связь. Компоненты C_2 и C_4 имеют *петли обратной связи*, которые показывают наличие *внутренних зависимостей* между их элементами. Все остальные дуги графа на рис. 3-1 представляют *внешние зависимости* между компонентами. Примером внешней зависимости между компонентами может служить обмен продукцией между отраслями промышленности. Энергетика поставляет электроэнергию другим отраслям промышленности, включая себя. Но производство электроэнергии больше зависит от добычи угля и от металлургии, поставляющей сталь для турбин, чем от величины собственного энергопотребления.

В общем случае сеть состоит из компонентов и элементов, которые содержатся в этих компонентах. Но при создании структур для моделирования проблем могут использоваться совокупности компонентов — под

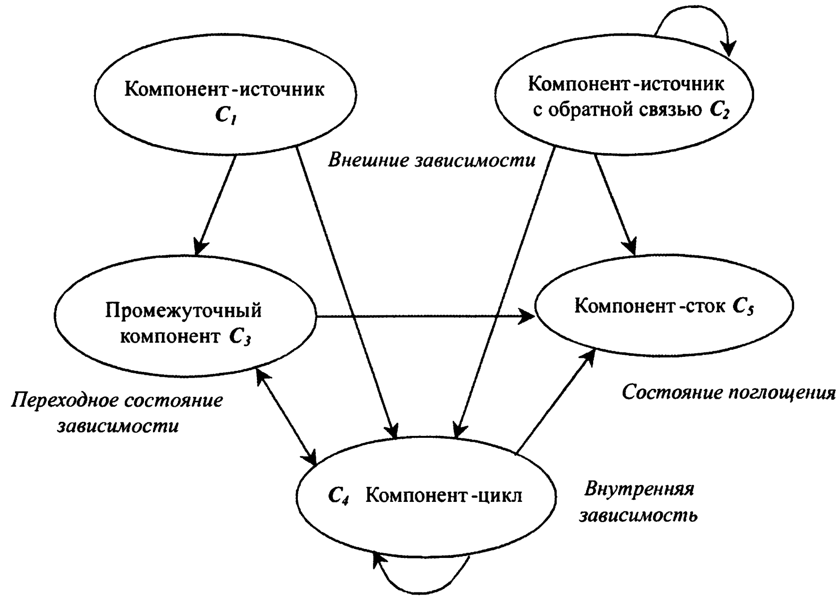


Рис. 3-1. Сетевая структура с обратными связями

системы. Таким образом, в порядке уменьшения размера можно выделить: собственно *систему*, состоящую из подсистем; *подсистемы*, состоящие из компонентов; и *компоненты*, содержащие множества *элементов*. Мы можем предположить, что целостная система не является суммой ее частей (в смысле обобщенного вклада в главную цель), а может, в соответствии с принципом синергетики, быть больше или меньше этой суммы. В дальнейшем мы иногда будем рассматривать в качестве элементов объекты, которые фактически являются компонентами, если они, в свою очередь, составляют более крупные объекты (подсистемы). Контекст это прояснит.

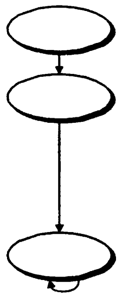
Предположим, что сетевая структура принятия решения содержит n_h элементов, которые будем обозначать C_h, $h = 1, \ldots, m$. Влияния, которые оказывают элементы некоторого компонента на другие элементы в системе, можно представить векторами приоритетов, полученными на основе парных сравнений, как в МАИ. Нас интересует, каким способом можно сгруппировать эти векторы и как затем обрабатывать сетевую структуру, представленную матрицей, которая описывает потоки внешнего и внутреннего влияния элементов системы. Иногда влияние одного компонента на другой интерпретируется как в иерархиях, т. е. как влияние компонента, в который входит дуга, на компонент, из которого она исходит. Взаимные влияния элементов в сети можно представить следующей *суперматрицей*:

$$
W = \begin{array}{cc|c|c|c|c|}
 & & C_1 & C_2 & \cdots & C_m \\
 & & e_{11}\quad e_{12}\ \cdots\ e_{1n1} & e_{21}\quad e_{22}\ \cdots\ e_{2n2} & \cdots & e_{m1}\quad e_{m2}\ \cdots\ e_{mnm} \\
\hline
C_1 & \begin{array}{c} e_{11} \\ e_{12} \\ \cdots \\ e_{1n1} \end{array} & W_{11} & W_{12} & \cdots & W_{1m} \\
\hline
C_2 & \begin{array}{c} e_{21} \\ e_{22} \\ \cdots \\ e_{2n2} \end{array} & W_{21} & W_{22} & \cdots & W_{2m} \\
\hline
 & \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\hline
C_m & \begin{array}{c} e_{m1} \\ e_{m2} \\ \cdots \\ e_{mnm} \end{array} & W_{m1} & W_{m2} & \cdots & W_{mm}
\end{array}
$$

Элементы W_{ij} в суперматрице называются *блоками* и представляют собой матрицы вида

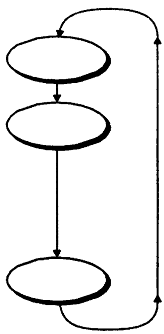
$$
W_{ij} = \left\| \begin{array}{cccc}
w_{i_1 j_1} & w_{i_1 j_2} & \cdots & w_{i_1 j_{n_j}} \\
w_{i_2 j_1} & w_{i_2 j_2} & \cdots & w_{i_2 j_{n_j}} \\
\vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
w_{i_{n_i} j_1} & w_{i_{n_i} j_2} & \cdots & w_{i_{n_i} j_{n_j}}
\end{array} \right\| .
$$

Каждый столбец в матрице W_{ij} представляет собой главный собственный вектор влияния элементов i-го компонента сети на элементы j-го компонента. Нулевые элементы вектора соответствуют элементам, не оказывающим влияния. Поэтому, проводя парные сравнения, мы используем не все элементы компонента, а только те, которые имеют влияние. На рис. 3-2 и 3-3 показаны примеры иерархии и холархии, включающие по m уровней. Рядом с рисунками показаны соответствующие им суперматрицы. В них элементы W_{ij} представляют собой блоки, отражающие непосредственную связь или влияние между i-м и j-м уровнями. Элемент $W_{n,n}$ в суперматрице иерархии представляет собой единичную матрицу I, которая соответствует циклу на нижнем уровне иерархии. Этот цикл показывает, что каждый



$$W = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & 0 & 0 \\ W_{21} & 0 & 0 & \cdots & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & W_{32} & 0 & \cdots & \bullet & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & W_{n-1,n-2} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & W_{n,n-1} & I \end{vmatrix}$$

Рис. 3-2. Иерархическая структура и суперматрица



$$W = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & 0 & W_{1,n} \\ W_{21} & 0 & 0 & \cdots & \bullet & 0 & 0 \\ 0 & W_{32} & 0 & \cdots & \bullet & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \bullet & \bullet & \bullet & \cdots & W_{n-1,n-2} & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \bullet & W_{n,n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

Рис. 3-3. Холархия и соответствующая ей суперматрица

элемент нижнего уровня зависит только от самого себя. Такой цикл необходим при представлении иерархий с помощью суперматрицы. Элемент $W_{1,n}$ в суперматрице холархии на рис. 3-3 отличен от нуля, так как в данном случае верхний уровень зависит от самого нижнего. Мы не размещали на главной диагонали суперматрицы единичные матрицы, чтобы в дальнейшем облегчить понимание того, как цикличность влияний проявляется при возведении суперматрицы в степень. Оба приведенных типа суперматрицы еще встретятся в книге.

Сеть можно получить из иерархии, постепенно увеличивая количество учитываемых внешних и внутренних связей между элементами. Существует классификация иерархий, модифицированных с целью перестройки в сети с обратной связью. Приводимая ниже классификация не используется в этой книге, но может пригодиться в будущем.

Классификация иерархий

Мы будем использовать следующую терминологию для специальных видов иерархий и их модификаций с целью преобразования в системы с обратной связью. Иерархия — это структура, вершиной которой является

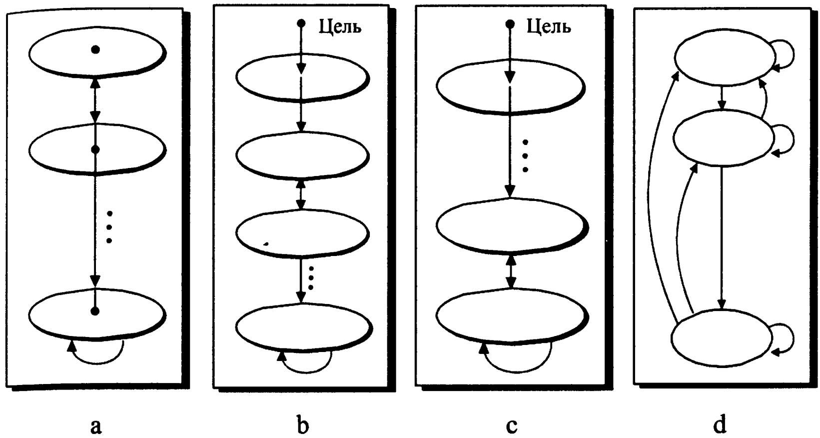


Рис. 3-4. Виды иерархий:
a — супархия; b — интархия; c — синархия; d — иерархическая сеть

цель. *Супархия* (*suparchy*) (рис. 3-4 a) — структура, идентичная иерархии, за исключением того, что она не имеет глобальной цели, а имеет цикл, образованный обратной связью между двумя верхними уровнями. *Интархия* (*intarchy*) (рис. 3-4 b) — иерархия с циклом обратной связи между двумя последовательными промежуточными уровнями. *Синархия* (*sinarchy*) (рис. 3-4 c) — иерархия с циклом обратной связи между двумя нижними уровнями. Мы также будем применять термины *неосупархия, неоинтархия* и *неосинархия* для иерархий, в которых произвольное число верхних, средних или нижних уровней объединено в циклы.

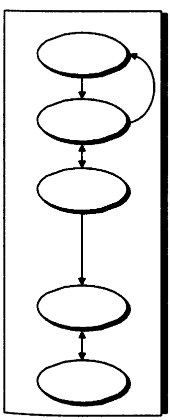


Рис. 3-5. Приводимая система, состоящая из двух неприводимых частей

Иерархическая сеть с вертикальной организаций облегчает понимание и запоминание уровней (рис. 3-4 d). Кроме того, существуют системы, которые представляют собой совокупности нескольких подсистем с взаимодействующими компонентами. Пример подобной системы показан на рис. 3-5, который демонстрирует приводимую сеть, где группа из двух нижних компонентов взаимодействует с группой из трех циклически связанных верхних уровней (компонентов).

Заметим, что где бы ни был расположен компонент-цикл, приоритеты его элементов, как правило, выше, чем приоритеты компонентов, ведущих к циклу. Последние могут становиться крайне малыми, что позволяет выявить части структуры, не представленные в конечных результатах. Однако если связь от компонента-цикла направлена к нециклическим терминальным узлам или частям иерархии, то приоритеты таких компонентов будут оказывать влияние на окончательный результат. Отметим, что структуры типа интархии и синархии можно усечь, отбросив верхние части. Тогда для синархии достаточно обработать суперматрицу, соответствующую двум нижним уровням. Эти выводы остаются справедливыми и для неоструктур.

3-3. Управляющая иерархия. Как задавать вопросы

Для большей ясности и точности отметим, что влияние, представленное вычисленными собственными векторами приоритетов, которые записываются в суперматрицу, должно быть измерено в терминах одного критерия, например экономического. В другой суперматрице может быть представлено влияние социального критерия и т. д. Критерии, для которых заполняются отдельные суперматрицы, мы будем называть *управляющими критериями*. Для того чтобы вычислить *обобщенные приоритеты влияния* по нескольким критериям, мы должны объединить результаты разнородных влияний, полученные на основе нескольких суперматриц. С этой целью мы должны сгруппировать управляющие критерии в структуру, которая позволит произвести оценку приоритетов ее элементов и использовать эти приоритеты для взвешивания и усреднения соответствующих предельных приоритетов отдельных суперматриц. Структура управляющих критериев может быть достаточно сложной, что мы увидим на примерах в главе 5. В дальнейшем структуру управляющих критериев мы будем называть *управляющей иерархией*. Анализ приоритетов в системе можно проводить в терминах управляющей иерархии с учетом зависимостей между альтернативами нижнего уровня, организованного как сеть (рис. 3-6). Зависимости могут существовать внутри компонентов и между ними. Верхняя часть управляющей иерархии может представлять собой сеть, если между компонентами управляющей структуры существуют зависимости. В общем случае структура проблемы принятия решения может быть представлена множеством взаимосвязанных сетей, результаты обработки которых синтезируются в соответствии с организацией управляющих критериев. В связи с высокой сложностью описания далее мы будем рассматривать только управляющие иерархии, не затрагивая управляющих сетевых структур. При этом мы иногда будем допускать наличие обратных связей между критериями управляющей иерархии.

Компонент в МАС представляет собой совокупность элементов; функция компонента выводится из синергетического взаимодействия элементов

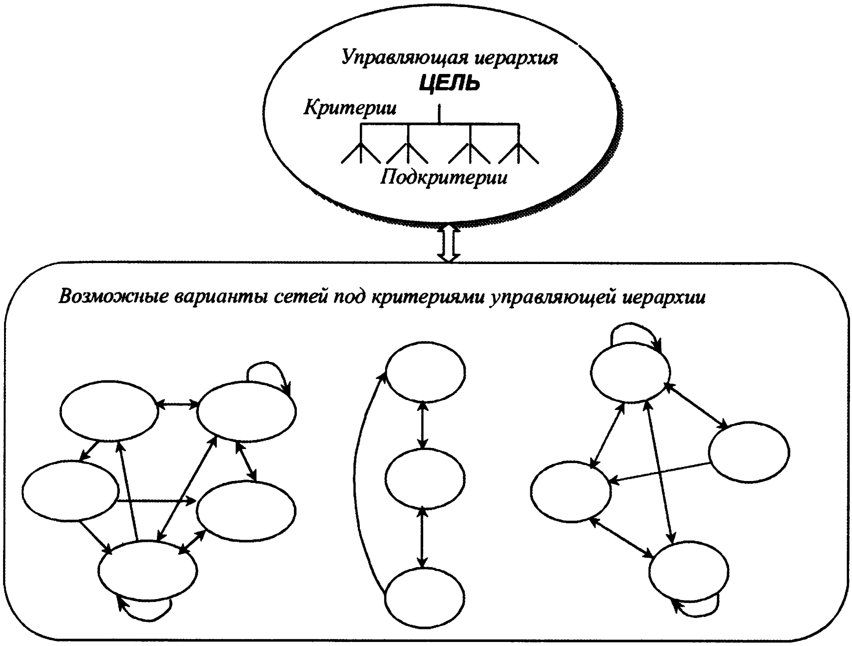


Рис. 3-6. Управляющая иерархия

и, следовательно, является функцией более высокого порядка, которая не представлена в каком-либо отдельном элементе. Компонент можно сравнить с визуальным или звуковым образом в телепередаче или с частью человеческого тела (рукой или ногой), которая состоит из мышц и костей. Механическое объединение элементов без учета синергетического взаимодействия не обладает качествами компонента в нашем понимании. Вообще компоненты сети отличаются от элементов именно наличием синергетического эффекта. Иначе они будут просто механическим объединением частей, не обладающим свойством целостности.

Критерии управляющей иерархии, которые используются для сравнения компонентов, расположены на более высоких уровнях, чем подкритерии, используемые для сравнения элементов в компонентах. Другими словами, критерии для сравнения компонентов должны быть более общими, чем критерии для сравнения элементов, из-за большей функциональной сложности компонентов.

Существует два типа управляющих критериев (подкритериев). К первому типу относятся критерии, непосредственно связанные с сетевой структурой, элементы которой сравниваются относительно управляющих критериев. В этом случае управляющий критерий называется *связываю-*

щим критерием. Ко второму типу относятся критерии, не имеющие непосредственной связи с сетевой структурой, но индуцирующие сравнения элементов сети. Такие управляющие критерии называются *индуцирующими критериями.*

При проведении парных сравнений необходимо ответить на следующий *общий вопрос*: для заданного управляющего критерия (подкритерия), компонента (элемента) сети, по которому оценивается влияние, и сравниваемой пары компонентов (элементов), насколько сильнее влияние данного объекта из пары на оцениваемый компонент по сравнению с другим объектом?

Материал этой главы важен для понимания сущности метода аналитических сетей, но требует хорошей математической подготовки. Он объясняет, каким образом можно получить приоритеты в задачах принятия решений с зависимостями и обратными связями из суперматрицы, которая является положительной или неотрицательной стохастической матрицей. Ниже приведены некоторые интересные теоремы, касающиеся иерархий. Читатели, интересующиеся только применением теории МАС, могут пропустить этот материал и сразу перейти к главе 4.

3-4. Выгоды, издержки, возможности, риски и их отношения

Любое решение имеет достоинства и недостатки, которые необходимо тщательно проанализировать, совершая выбор. Некоторые из них отражают вполне определенные аспекты проблемы, другие являются менее ясными и могут иметь место с некоторой вероятностью. Благоприятные аспекты решения, ожидаемые с высокой вероятностью, называются *выгодами*, в то время как неблагоприятные называются *издержками*. Сомнительные аспекты решения также могут быть положительными и отрицательными. Положительные аспекты — это *возможности*, которые решение могло бы создать, а отрицательные аспекты называют *рисками*, которые может повлечь за собой рассматриваемое решение. Каждый из этих четырех аспектов может быть представлен отдельной структурой принятия решения, начиная от управляющей иерархии выгод с подчиненной сетью взаимозависимых компонентов, связанных с управляющими критериями для выгод, и заканчивая соответствующей структурой рисков. Мы будем обозначать совместное применение всех четырех аспектов в анализе решений аббревиатурой *BOCR* (Benefits — Opportunities — Costs — Risks), в которой на первых местах расположены положительные аспекты (выгоды и возможности), а затем отрицательные (издержки и риски). Каждый из этих аспектов вносит вклад в качество решения и должен рассматриваться отдельно с использованием набора (упорядоченных по приоритетам) критериев, которые могут применяться для анализа любых других решений. Мы будем называть эти аспекты решения *качествами*, а критерии, по которым они оцениваются, — *критериями качества*. Примерами критериев качества являются следующие: удовлетворение требованиям, удобство, гармония, согласие, общественное достояние, прогресс, богатство, мощность, эффективность и т. д. Критерии необходимо упорядочить по приоритетам для применения в конкретных задачах принятия решений. Затем мы можем упорядочить рассматриваемые альтернативы для каждой из структур *BOCR* и синтезировать обобщенный результат. Отметим, что, выполняя сравнения по критериям издержек и рисков, нужно спрашивать, какая из альтернатив является более дорогостоящей или более опасной (а не менее дорогостоящей или менее опасной), потому что при парных сравнениях мы оцениваем, во сколько раз доминирующий элемент пары превосходит менее предпочтительный относительно рассматриваемого свойства. Приоритеты альтернатив по издержкам и рискам вычисляются как обратные величины значений, полученных путем традиционной обработки иерархий издержек и рисков. Такой подход согласуется с использованием фактических измерений (например, в долларах) по нескольким критериям с последующей инверсией заключительного результата. Программное обеспечение для МАС *Super Decision* выполняет автоматическую инверсию приоритетов по издержкам и рискам после ввода всех экспертных суждений.

3-5. Приоритеты в суперматрице

Нас интересует способ получения предельных приоритетов влияния рассматриваемых элементов на основе суперматрицы сетевой задачи принятия решений. Он заключается в следующем. Сначала суперматрица преобразуется к такому виду, чтобы сумма элементов в любом ее столбце была равна единице. Такие матрицы называются матрицами, стохастическими по столбцам, или просто *стохастическими матрицами*. Если матрица является стохастической, то способ вычисления предельных приоритетов будет зависеть от того, является ли матрица приводимой, примитивной и цикличной.

Здесь возникает вопрос: существует ли математически обоснованный способ преобразования произвольной суперматрицы, в которой суммы элементов в столбцах обычно больше единицы, в стохастическую матрицу? Приоритет элемента в пределах конкретного компонента не является адекватным индикатором его приоритета на множестве всех компонентов. Элемент компонента с максимальным приоритетом может иметь не самый высокий приоритет при рассмотрении всех компонентов. Это очевидно, поскольку каждый компонент имеет элемент с максимальным приоритетом, и все такие элементы не могут занимать первое место в системе. Следовательно, мы должны провести непосредственное сравнение взаимосвязанных компонентов согласно их влиянию на каждый компонент системы относительно управляющего критерия более высокого уровня. Каждое сравнение дает вектор приоритетов влияния всех компонентов, записанных в суперматрице слева (имена строк), на каждый компонент, указанный вверху (имена столбцов). Число сравнений равно числу компонентов. Собственные векторы матриц парных сравнений компонентов используются в качестве весовых коэффициентов, на которые умножаются блоки суперматрицы, расположенные в столбце под данным компонентом. Первый элемент вектора умножается на все элементы первого блока в этом столбце, второй — на все элементы второго блока и т. д. Таким способом мы взвешиваем блоки в каждом столбце суперматрицы. В результате получается *взвешенная суперматрица*, которая является стохастической. Ее дальнейшая обработка позволяет получить желаемые приоритеты элементов путем вычисления *предельной суперматрицы* способом, описанным ниже. Элементы предельной суперматрицы (предельные приоритеты) интерпретируются как предельные оценки долговременного влияния каждого элемента системы на все остальные элементы.

ПРИМЕЧАНИЕ: При приведении суперматрицы к стохастическому виду возможны ситуации, когда не все элементы некоторого компонента оказывают влияние на элементы другого компонента. Возможно даже, что на некоторый элемент вообще не влияют элементы другого компонента (нулевой вектор приоритетов) или влияют только некоторые из них. В случае, когда среди собственных векторов в некотором столбце суперматрицы есть нулевые (но не все векторы являются нулевыми), следует осуществить повторную нормализацию этого столбца. Заметим, что, если все элементы компонента имеют нулевое влияние на все элементы другого компонента, то приоритет влияния первого компонента на второй должен быть равен нулю. Однако это не так, когда некоторые или все элементы первого компонента влияют на некоторые или все элементы второго. Именно поэтому повторная нормализация некоторых столбцов необходима и естественна при построении взвешенной стохастической суперматрицы.

Если компонент, содержащий альтернативные варианты решений, является компонентом-стоком, который не влияет на другие компоненты, то его можно не включать в суперматрицу, а относящиеся к нему приоритеты использовать в процессе синтеза, после того как будут вычислены предельные приоритеты для суперматрицы. Этот способ позволяет гарантировать сохранение порядка в тех случаях, когда это желательно, используя абсолютные измерения с помощью стандартов. Если компонент, содержащий альтернативы, не является стоком, то его нужно сохранить в суперматрице, при этом для вычисления приоритетов используется метод парных сравнений (относительное измерение) и, следовательно, порядок может изменяться.

О ПРЕДЕЛЬНОЙ СУПЕРМАТРИЦЕ И ЕЕ ЧЕЗАРОВСКОЙ СУММЕ

Зачем суперматрицу возводят в степени? Затем, чтобы увидеть распространение влияния по всем возможным маршрутам графа влияний, которому соответствует суперматрица. Элементы взвешенной суперматрицы показывают непосредственное влияние каждого элемента системы на все другие элементы. Но элементы могут влиять друг на друга косвенно, через некоторый третий элемент или элементы. Потенциально может существовать множество таких транзитных элементов. Поэтому необходимо рассмотреть все возможные маршруты влияния через транзитные элементы. Оценку косвенного влияния во всех парах элементов через один промежуточный элемент можно получить, возведя взвешенную суперматрицу в квадрат (см. теорему о матрице смежности и числе путей на графе в Приложении 1). Кроме того, маршрут влияния первого элемента на второй может включать третий элемент, который влияет на четвертый, а тот, в свою очередь, влияет на второй. Все такие влияния можно увидеть в суперматрице, возведенной в куб, и т. д. Таким образом, мы имеем бесконечную последовательность матриц влияния: собственно матрица, ее квадрат, куб, четвертая степень и т. д. Обозначим эту последовательность W^k, $k = 1, 2, \ldots$. Если мы возьмем предел среднего значения последовательности из N степеней суперматрицы $\lim\limits_{k\to\infty}(1/N)\sum\limits_{k=1}^{N} W^k$ (известный как чезаровская сумма), будет ли он конечным и единственным? Как вычислить этот предел, чтобы получить желаемые приоритеты? Из математического анализа известно, что, если последовательность сходится к пределу, то ее чезаровская сумма сходится к тому же самому пределу. Так как последовательность задана целочисленными значениями показателя степени матрицы, достаточно выяснить, каков предел этой степени. Может оказаться, что последовательность не сходится к единственному пределу, но среднее чезаровских сумм, соответствующих различным пределам последовательности, дает единственный предел. Как мы увидим далее, оба этих случая могут иметь место при возведении суперматриц в степени. Каноническая форма Жордана для стохастической матрицы W помогает убедиться в том, что вообще предел $\lim\limits_{k\to\infty} W^k$ существует. Известно, что W подобна своей матрице Жордана J, если существует невырожденная матрица P такая, что $J = PWP^{-1}$. Следовательно, возведение W в предельные степени эквивалентно возведению J в предельные степени. Что представляет собой матрица J? С каждой квадратной матрицей связана единственная матрица Жордана, которая состоит из квадратных блоков, главные диагонали которых лежат на главной диагонали матрицы. Все элементы матрицы, находящиеся вне этих блоков, равны нулю. Диагональные элементы в каждом блоке равны собственному значению W, элементы, расположенные выше главной диагонали, равны 1, а те, что лежат ниже главной диагонали, равны нулю. Говорят, что матрица W является прямой суммой блоков матрицы Жордана. Опустив лишние подробности, мы можем утверждать, что предел $\lim\limits_{k\to\infty} W^k$ существует, если: а) ни одно из собственных значений W по модулю не превышает единицы; б) матрица W не имеет собственных значений, равных по модулю единице, кроме $\lambda = 1$, и, если $\lambda = 1$, то это единственное собственное значение, поскольку стохастическая матрица W будет иметь только единичные блоки в канонической форме Жордана. Вообще можно определить предел в смысле Чезаро, когда условие б) не удовлетворяется. Однако мало знать, что предел существует, нам следует разобраться, как его вычислить.

3-6. Раскрытие сложности функции $f(W)$

Данный вопрос касается пяти разделов математики; четыре из них описаны в этой главе, а пятый обсуждается в [1]. Первый раздел имеет отношение к собственным значениям и собственным векторам матриц, которые обсуждались в этой главе и подробно рассмотрены в Приложении 1. Второй раздел касается характеристических функций матриц, третий связан с характеристиками неотрицательных матриц, их главными собственными значениями и собственными векторами, четвертый — со стохастическими матрицами и марковскими цепями, и пятый — с распределениями Дирака (обобщенные функции) и нервной активацией, которые рассматриваются в моей книге о мозге [1].

Три ведущих математика XIX века заложили основы теории матриц, исследуя разрешимость систем линейных алгебраических уравнений. Это — ирландский математик Уильям Роуан Гамильтон (1805–1865) и два англичанина — Джеймс Джозеф Сильвестр (1814–1897) и Артур Кэли (1821–1891). Гамильтон в 21 год стал королевским астрономом Ирландии и занимал этот пост до своей смерти. Сильвестр был поэтом, острословом и одним из главных создателей математической терминологии. За годы своей работы в университете Джона Хопкинса в Балтиморе (1877–1883) он создал ему хорошую репутацию в математике. Будучи юристом, Артур Кэли стал профессором математики в Кембридже. Результат, известный как теорема Гамильтона—Кэли, мы рассмотрим немного позднее. Сильвестр предложил свою знаменитую формулу для представления функции $f(W)$ матрицы W и, в частности, $f(W) = W^{\infty}$.

Еще два имени, которые необходимо упомянуть, говоря о третьем разделе, — это немецкие математики Оскар Перрон (1880–1975) и Джордж Фердинанд Фробениус (1849–1917). Первый в 1907 году доказал, что матрица с положительными элементами всегда имеет действительное положительное и единственное собственное значение $\lambda_{\max}$, называемое главным собственным значением, которое строго доминирует по модулю над всеми остальными собственными значениями. С главным собственным значением связан главный собственный вектор, положительный и единственный с точностью до постоянного положительного множителя. В 1912 году Фробениус усилил и расширил результат Перрона. Он вывел аналогичное заключение для неотрицательной неприводимой матрицы, которое отличается от предыдущего тем, что главное собственное значение не строго доминирует по модулю над другими собственными значениями, но может быть равно им, а соответствующий собственный вектор является неотрицательным.

Четвертый из упомянутых нами разделов математики связан с изучением марковских цепей и процессов. Андрей Андреевич Марков (1856–1922) был, вероятно, первым человеком, который привлек внимание исследователей к стохастическим матрицам своей работой в области вероятностных цепей переходов (известных как марковские цепи) между различными состояниями системы. В процессе анализа такого типа часто бывает необходимо определить установившиеся состояния или предельные вероятности, когда они существуют, а также способ их получения.

Теория собственных значений необходима для характеристики различных случаев, которые возникают при вычислении W^{∞}. Существует ряд фактов, с которыми полезно будет познакомиться. Главное собственное значение $\lambda_{\max}$ неотрицательной матрицы лежит между максимальной и минимальной суммами элементов строк. Поскольку главное собственное значение матрицы совпадает с главным собственным значением ее транспонированной матрицы, значение $\lambda_{\max}$ лежит между значениями максимальной и минимальной суммы столбцов. Таким образом, если неотрицательная матрица является стохастической по столбцам (т. е. сумма каждого столбца равна 1), как, например, суперматрица, то максимальная и минимальная суммы ее столбцов равны единице и, следовательно, ее максимальное собственное значение будет равно 1. Если матрица неотрицательная, но не все ее элементы положительные, то модули некоторых из ее собственных значений могут быть равны единице. Если матрица неприводимая, то теорема Фробениуса гарантирует нам, что $\lambda_{\max} = 1$ является единственным корнем; но если матрица приводимая, то $\lambda_{\max} = 1$ может быть единственным или кратным корнем.

Чтобы убедиться в том, что единица является собственным значением стохастической суперматрицы W, заметим, что левый собственный вектор такой матрицы с собственным значением $\lambda_{max} = 1$ будет равен $e = (1, \ldots, 1)$. Собственное значение можно вычислить, суммируя значения в каждом столбце матрицы и получая при этом вектор, чье скалярное произведение на соответствующий нормированный собственный вектор дает желаемое собственное значение. Таким образом, из $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = \lambda w_i, \quad i = 1, \ldots, n$, суммируя по i, переставляя суммы и помня о том, что $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, мы имеем $\sum_{j=1}^{n} w_j \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = \lambda$.

Для стохастической по столбцам матрицы вторая сумма в левой части выражения будет равна единице, а в качестве w мы можем взять вектор e, нормализованный таким образом, чтобы $w_j = 1/n$, тогда суммирование по j даст нам желаемый результат $\lambda = 1$. Так как максимальная и минимальная суммы столбцов стохастической матрицы равны единице, $\lambda = 1$ будет максимальным, или главным собственным значением матрицы.

О корнях из единицы

Если характеристическое уравнение неотрицательной матрицы имеет вид

$$\lambda^n - 1 = 0,$$

или если оно представляет собой произведение нескольких сомножителей, один из которых

$$\lambda^k - 1 = 0,$$

корни характеристического полинома обладают специфическим свойством [2].

В соответствии с фундаментальной теоремой алгебры уравнение $\lambda^n - 1 = 0$ имеет n корней. В соответствии с теоремой де Мура представление комплексного числа z имеет вид:

$$z = a + bi = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \theta = \arctan\frac{b}{a}.$$

Мы можем показать разложением в ряд, что $z = re^{i\theta}$. Каждый корень из единицы (корень уравнения $\lambda^n - 1 = 0$) мы можем представить в сферических координатах $\lambda = re^{i\theta}$, откуда можно вывести $\lambda^k = r^k e^{i\theta k}$.

Рассмотрим комплексное число $z = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = e^{2\pi i/n}$, где z — n-й корень из единицы, который можно представить в виде:

$$z^n = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \left(e^{\frac{2\pi i}{n}}\right)^n = e^{2\pi i} = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1.$$

Для любого целого m справедливо выражение $(z^m)^n = (z^n)^m = 1$, в котором z^m является корнем n-й степени из 1. В частности, последовательность $z, z_2, z_3, \ldots, z^{n-1}, z^n$ представляет собой n различных корней из единицы. Если, например, две степени z одинаковы, мы имеем $z^s = z^t$, $t > s$, и можем записать равенство

$$1 = z^{t-s} \equiv z^p = \cos\frac{2\pi p}{n} + i\sin\frac{2\pi p}{n}; \quad \cos\frac{2\pi p}{n} = 1; \quad \sin\frac{2\pi p}{n} = 0,$$

приравнивая действительную и мнимую части. Из $\sin\frac{2\pi p}{n} = 0$ следует, что значение $\frac{2\pi p}{n}$ является q-кратным π, что при подстановке дает $\cos q\pi = 1$, где q — целое четное число $q = 2r$ и, следовательно, $\frac{2p}{n} = 2r$ или $p = nr$.

Но так как $1 \le p = t - s \le n - 1$, то получаем противоречие. Следовательно, все корни уравнения $\lambda^n = 1$ $(z, z_2, z_3, \ldots, z^{n-1}, z^n)$ различны. Модули всех этих корней равны единице. Вообще, когда существует c таких корней, их можно представить как $\lambda_1 = \lambda_{\max}$, $\lambda_2 = \lambda_{\max} z$, $\ldots$, $\lambda_c = \lambda_{\max} z^{c-1}$, где $z = e_2^{\pi i/c}$ и $i = \sqrt{-1}$.

О кратности корня

Нас интересует кратность корня $\lambda_{\max} = 1$ стохастической суперматрицы W. Если $\lambda_{\max}$ — кратный корень характеристического полинома кратности k, то $(\lambda - \lambda_{\max})^k$ является одним из сомножителей этого полинома. Один из способов найти k состоит в многократном дифференцировании полинома до тех пор, пока $\lambda_{\max}$ не перестанет быть корнем результирующего полинома. Таким образом, если λ_* является корнем полинома $f(\lambda)$ кратности k, то при дифференцировании $f(\lambda)$ по λ мы получим:

$$f'(\lambda) = (\lambda - \lambda_*)^k g'(\lambda) + k(\lambda - \lambda_*)^{k-1} g(\lambda) = (\lambda - \lambda_*)^{k-1}[(\lambda - \lambda_*)g'(\lambda) + kg(\lambda)],$$

где выражение в квадратных скобках не делится на $\lambda - \lambda_*$, следовательно $f'(\lambda)$ имеет корень λ кратности $k-1$. Дифференцирование можно провести k раз, пока λ не перестанет быть корнем, при этом мы выясним, чему равно k.

3-7. Вычисление функций матрицы

Многие проблемы реальной жизни решены с помощью математики путем исследования функций различных операторов. Классическим примером является решение систем линейных неоднородных уравнений, представленных матричными операторами $Ax = y$. Решение такой системы возможно, если существует определенная функция матрицы A, а именно ее обратная матрица A^{-1}. Используя эту функцию, мы можем получить решение системы: $x = A^{-1}y$. В MAC представляет интерес другой вид функций матрицы, а именно: $\lim\limits_{k\to\infty} W^k$. В связи с этим полезно познакомиться с общим способом вычисления функций матрицы A [3].

Рассмотрим полином $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$.

Значение функции $f(x)$ полностью определяется совокупностью $n+1$ отличающихся значений аргумента x. Множество из $n+1$ значений аргумента x и множество, содержащее $n+1$ соответствующих значений функции $f(x)$, позволяют сформировать систему из $n+1$ линейных уравнений с коэффициентами a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, из которой можно получить единственное решение для коэффициентов и таким образом однозначно определить функцию $f(x)$. Если для двух полиномов n-й степени совпадает $n+1$ или большее количество значений, то они должны быть идентичны. В противном случае они будут отличаться полиномом, степень которого не больше, чем n, но в соответствии с фундаментальной теоремой алгебры наличие не более чем n корней противоречит тому факту, что такой полином должен иметь, по крайней мере, $n+1$ корень.

Следующее представление полинома известно как интерполяционная формула Лагранжа, названная по имени Джозефа Луи Лагранжа (1736–1813), математика с итало-французской родословной, который работал при дворе короля Фридриха Великого и переехал в Париж после его смерти. Эта формула позволяет вычислить значения полинома $f(x)$ n-й степени в любой точке на основе известных значений в $n+1$ точках $x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}$:

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_{n+1})}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_{n+1})} = \sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\frac{\prod\limits_{j\neq i}(x-x_j)}{\prod\limits_{j\neq i}(x_i-x_j)}.$$

Формула Лагранжа имеет вид полинома n-й степени от x, который однозначно определяет функцию $f(x)$. Если степень $f(x)$ не превышает $n - 1$, то верхним пределом суммы будет n, что соответствует традиционной форме записи, которая обычно встречается в литературе. Заметим, что в правой части последнего выражения только множитель $f(x_i)$ зависит от вида функции f, а его сомножитель, являющийся полиномом $(n - 1)$-й степени, не зависит от вида f.

Если вместо переменной x мы подставим в вышеприведенную формулу матрицу A, то по аналогии между алгебрами этих двух полиномов полином n-й степени с A можно представить в виде:

$$f(A)=\sum_{i=1}^{n+1} f(x_i)\frac{\prod\limits_{j\neq i}(x_j I - A)}{\prod\limits_{j\neq i}(x_j - x_i)}.$$

При этом для матриц величины x_i соответствуют собственным значениям λ_i.

Сильвестр показал, что эта формула в общем случае справедлива для целых функций матрицы A (т. е. для аналитических функций, чье разложение в степенной ряд сходится на гиперплоскости). Он заметил, что если таким образом представить матрицу A в k-й степени, то каждый терм будет полиномом $(n - 1)$-й степени от A, и сумма превратится в полином от A. Таким образом, приведенное выражение можно использовать для представления сходящегося степенного ряда.

Для матриц, приводимых к диагональному виду, в частности для матриц с различными корнями характеристического уравнения, эта формула записывается в виде:

$$f(A)=\sum_{i=1}^{n} f(\lambda_i)Z(\lambda_i)\text{, где } Z(\lambda_i)=\frac{\prod\limits_{j\neq i}(\lambda_j I - A)}{\prod\limits_{j\neq i}(\lambda_j - \lambda_i)}.$$

Можно показать, что $Z(\lambda_i)$ — полная система ортогональных идемпотентных матриц со следующими свойствами:

$$\sum_{i=1}^{k} Z(\lambda_i) = I;$$

$$Z(\lambda_i)Z(\lambda_j) = 0; \quad i \neq j;$$

$$Z^2(\lambda_i) = Z(\lambda_i);$$

где I и 0 — единичная и нулевая матрицы соответственно.

Первое соотношение получается при подстановке единичной матрицы на место $f(A)$ в предыдущем выражении. Второе следует из факта, что произведение двух полиномов $Z(\lambda_i)Z(\lambda_j)$ содержит все множители характеристического полинома от A, который стремится к нулю по теореме Гамильтона—Кэли. Эта теорема гласит, что характеристическое уравнение тождественно равно нулевой матрице, если λ заменить на A, а свободный член умножить на единичную матрицу I при переходе к матричному уравнению.

Нетрудно показать, что полином с единственной переменной и скалярными коэффициентами и такой же полином с квадратной матрицей, заменяющей переменную, имеют аналогичные алгебры. Таким образом, принципиальным моментом является формирование полинома с матрицей, который можно обрабатывать как полином с единственной переменной.

При последовательном n-кратном умножении обеих частей первого равенства на $Z(\lambda_i)$ с применением условия ортогональности на каждом шаге получается третье равенство, выражающее свойство идемпотентности.

Если $f(A) = A^k$, и все собственные значения различны, то имеем:

$$A^k = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k Z(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^k \frac{\prod_{j\neq i}(\lambda_j I - A)}{\prod_{j\neq i}(\lambda_j - \lambda_i)}.$$

В этой формуле каждый терм представляет собой произведение функции одного из характеристических корней на полином $(n-1)$-й или меньшей степени с матрицей A. Следовательно, если мы хотим оценить W^k при $k \to \infty$, достаточно проверить, что произойдет с пределом $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_i^k$, $i = 1, \ldots, n$. В каждом терме полученного выражения мы можем заменить собственное значение λ его представлением в виде комплексного числа $re^{i\theta}$. В этом случае нужно будет исследовать поведение r^k при $k \to \infty$, так как значения выражения $e^{i\theta k} = \cos\theta k + i\sin\theta k$ ограничены по величине и имеют колебательный характер. Таким образом, предельный результат зависит от значения r. Если $k \to \infty$, то $r^k = \begin{cases} 0, & r<1, \\ 1, & r=1, \\ \infty, & r>1. \end{cases}$

В случае $\lambda_{\max} = 1$ может существовать единственный корень или кратные корни. Рассмотрим модифицированную формулу Сильвестра для случая кратных корней.

Отметим, что в формуле Лагранжа термы, содержащие $(x - x_j)$ в числителе и $(x_i - x_j)$ в знаменателе, исключаются только один раз, потому что все значения x_i различны. Если x_i — повторяющееся значение с кратностью k, то как исключить его k раз? Очевидно, для того чтобы исключить его еще $(k - 1)$ раз, можно продифференцировать правую часть $(k - 1)$ раз и разделить ее на $(k - 1)$. Это нужно сделать для каждого кратного корня.

Для кратных корней характеристического уравнения мы будем использовать выражение, которое известно как вырожденная форма теоремы Сильвестра:

$$f(A)=\sum_{i=1}^{k}T(\lambda_i)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(m_i-1)!}\frac{d^{m_i-1}}{d\lambda^{m_i-1}}f(\lambda)(\lambda I-A)^{-1}\left.\frac{\prod_{i=1}^{n}(\lambda-\lambda_i)}{\prod_{i=m_{i+1}}^{n}(\lambda-\lambda_i)}\right|_{\lambda=\lambda_i},$$

где k — число различных корней, а m_i — кратность корня λ_i.

Как вычислить $(\lambda I - A)^{-1}$? Между обратной матрицей A^{-1} и сопряженной матрицей $adjA$ существует соотношение: $A^{-1}=\dfrac{adjA}{\det A}$, или $A(adjA) = (\det A)I$. Обозначив $F(\lambda) = adj(\lambda I - A)$, получим:

$$(\lambda I-A)F(\lambda)=\Delta(\lambda)I,\quad \Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)\cdots(\lambda-\lambda_n);\quad (\lambda I-A)^{-1}=\frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}.$$

Тогда

$$T(\lambda_i)=f(\lambda_i)Z_{m_i-1}(\lambda_i)+f'(\lambda_i)Z_{m_i-2}(\lambda_i)+\frac{f''(\lambda_i)}{2!}Z_{m_i-3}(\lambda_i)+\ldots+\frac{f^{m_i-1}(\lambda_i)}{(m-1)!}Z_0(\lambda_i),$$

$$Z_{m_i}(\lambda_i)=\frac{1}{m_i!}\frac{d^{m_i}}{d\lambda^{m_i}}\left.\frac{F(\lambda)}{\Delta_{m_i}(\lambda)}\right|_{\lambda=\lambda_i},$$

где производная m-го порядка от F имеет вид:

$$F^{(m)}(\lambda_i)=m!(-1)^{n-m-1}(\lambda_i I-A)^{m_i-m-1}\prod_{j\neq i}(\lambda_j I-A),\qquad \Delta_{m_i}(\lambda)=\prod_{j\neq i}(\lambda-\lambda_j).$$

Например, $Z_1(\lambda)=\dfrac{d}{d\lambda}\dfrac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}=\dfrac{\Delta(\lambda)F'(\lambda)-F(\lambda)\Delta'(\lambda)}{[\Delta(\lambda)]^2}$.

Для различных корней имеем:

$$(\lambda I - A)^{-1} = \frac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{C_1}{\lambda - \lambda_1} + \frac{C_2}{\lambda - \lambda_2} + \ldots + \frac{C_n}{\lambda - \lambda_n}.$$

Правая часть этого выражения представляет собой рациональное разложение дроби $\dfrac{F(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$. Если мы умножим обе части данного выражения на $(\lambda - \lambda_i)$, то получим

$$C_i = \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)}; \quad \Delta'(\lambda_i) = \left.\frac{d\Delta(\lambda)}{d\lambda}\right|_{\lambda = \lambda_i},$$

где $\Delta'(\lambda)$ — производная от $\Delta(\lambda)$.

Следовательно, значение выражения $(\lambda I - A)^{-1}$, которое называют резольвентой A, можно вычислить по формуле:

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)(\lambda - \lambda_i)}.$$

Кроме того, можно записать $f(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{f(\lambda_i)F(\lambda_i)}{\Delta'(\lambda_i)}$.

Этот результат вместе с соотношением $F(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}\Delta\lambda$ наводит на мысль о том, что функции операторов, отличных от матриц, можно представить аналогичным образом. В этом случае главной проблемой становится не кратность корней, а существование $(\lambda I - A)^{-1}$, тип спектральных значений и их расположение на комплексной плоскости.

3-8. Значения предела при возведении суперматрицы в целые степени

Теория подсказывает нам, что нужно делать, чтобы получить предел суперматрицы W^k. При этом возможны три случая:

1. $\lambda_{max} = 1$ является единственным корнем;
2. существуют другие корни из единицы, которые вызывают цикличность независимо от того, является ли $\lambda_{max} = 1$ простым или кратным корнем;
3. $\lambda_{max} = 1$ является кратным корнем.

Рассмотрим понятия приводимой и неприводимой матрицы, предложенные Фробениусом. Неотрицательная матрица (a_{ij}) неприводима, если граф (который содержит количество вершин, равное порядку матрицы, и для любой пары узлов i и j имеется дуга, направленная от i к j, если $a_{ij} > 0$, в противном случае дуга отсутствует), соответствующий этой матрице, сильно связан (т. е. существует последовательность дуг, часто называемых путем или маршрутом, связывающая две любые вершины графа). Таким образом, неприводимая матрица не может иметь вершин-источников или стоков. Алгебраически, неотрицательная матрица W неприводима, если она не может быть преобразована к виду

$$\begin{Vmatrix} W_1 & 0 \\ W_2 & W_3 \end{Vmatrix},$$

где W_1–W_3 — блоки, представляющие собой квадратные матрицы. В противном случае матрицу считают приводимой. Матрица W неприводима тогда и только тогда, когда $(I + W)^n > 0$ (доказательство см. в Приложении 1). Неприводимая матрица имеет единственное максимальное собственное значение λ_{max}. Если W — стохастическая матрица, то $\lambda_{max} = 1$. Неприводимая матрица может быть либо примитивной (некоторые степени W положительны, а W^{n^2-2n+1} всегда положительна), либо циклической, что говорит о существовании других собственных значений, являющихся корнями из единицы (случаи 1 и 2). Если W — приводимая матрица, то возможны все три перечисленных выше случая: единственный корень $\lambda_{max} = 1$ (случай 1); кратный корень (случай 3); существование других корней из единицы (случай 2).

Предельные приоритеты помещаются в строках, соответствующих элементам, которые они представляют. Они нормируются для элементов каждого компонента для того, чтобы перейти к относительным значениям. Выясним, какими будут предельные решения для трех рассматриваемых случаев.

1. Когда нет других корней из единицы, и $\lambda_{max} = 1$ является доминирующим по модулю простым корнем, и поэтому $f(\lambda) = \lambda^k$, единственный корень в степени k не стремится к нулю, так как по формуле Сильвестра при $k \to \infty$ $1^k \to 1$. В этом случае

$$W^k \to \frac{\prod\limits_{j \neq i}(\lambda_j I - W)}{\prod\limits_{j \neq i}(\lambda_j - \lambda_i)} = \frac{adj(I - W)}{\Delta'(1)}.$$

Более простой и удобный результат для случая 1, который лучше известен, получается следующим образом [4]. Если неотрицательная матрица W является примитивной, то $\lim\limits_{k\to\infty} W^k = we^T$, где w — правый главный собственный вектор матрицы W и, поскольку W — стохастическая матрица, ее левый главный собственный вектор будет $e^T = (1, \ldots, 1)$. Таким образом, мы опять получим решение $\lambda_{\max} = 1$ для примитивной матрицы. Можно показать, что этот результат совпадает с предыдущим, который содержит матрицу, сопряженную с W. Самым примечательным в этом результате является то, что он представляет собой стохастическую матрицу, в которой все столбцы идентичны, т. е. все элементы любой строки одинаковы. Если мы умножим we^T справа на стохастическую матрицу W, мы снова получим we^T, что свидетельствует о достижении предела. Так как произведение стохастических матриц является стохастической матрицей, то на практике, имея компьютерную поддержку, для получения хорошего приближения к предельному результату достаточно возвести примитивную стохастическую матрицу W в достаточно большую степень.

2. Рассмотрим сначала пример с циклическим характером результатов. Пусть задана матрица W следующего вида:

$$W = \begin{Vmatrix} 0 & W_{12} & 0 \\ 0 & 0 & W_{23} \\ W_{31} & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

При ее возведении в целочисленные степени получим последовательность:

$$W^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & W_{12}W_{23} \\ W_{23}W_{31} & 0 & 0 \\ 0 & W_{31}W_{12} & 0 \end{Vmatrix},$$

$$W^3 = \begin{Vmatrix} W_{12}W_{23}W_{31} & 0 & 0 \\ 0 & W_{23}W_{31}W_{12} & 0 \\ 0 & 0 & W_{31}W_{12}W_{23} \end{Vmatrix},$$

$$W^{3k} = \begin{Vmatrix} (W_{12}W_{23}W_{31})^k & 0 & 0 \\ 0 & (W_{23}W_{31}W_{12})^k & 0 \\ 0 & 0 & (W_{31}W_{12}W_{23})^k \end{Vmatrix},$$

$$W^{3k+1} = \begin{Vmatrix} 0 & (W_{12}W_{23}W_{31})^k W_{12} & 0 \\ 0 & 0 & (W_{23}W_{31}W_{12})^k W_{23} \\ (W_{31}W_{12}W_{23})^k W_{31} & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

$$W^{3k+2} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & (W_{12}W_{23}W_{31})^k W_{12}W_{23} \\ (W_{23}W_{31}W_{12})^k W_{23}W_{31} & 0 & 0 \\ 0 & (W_{31}W_{12}W_{23})^k W_{31}W_{12} & 0 \end{Vmatrix}.$$

В данном случае мы не получим единственного предельного результата, потому что при возведении матрицы W в степени она циклически проходит через три различные стадии, показанные выше, и каждая из этих форм стремится к собственному пределу, который отличается от двух других. В этом случае для получения предельного результата нужно вычислить среднее трех этих пределов (чезаровскую сумму).

Попытаемся вычислить среднее предельное значение для цикла длиной c, усредняя высокие степени для каждой из последовательных стадий цикла. Формально это можно записать в виде

$$\frac{1}{c}\left[(W^c)^\infty + (W^{c+1})^\infty + \ldots + (W^{c+c-1})^\infty\right] = \frac{1}{c}\left(I + W + \ldots + W^{c-1}\right)(W^c)^\infty;\ c \geq 2.$$

С помощью компьютера можно осуществить достаточное для усреднения количество циклических вычислений, возводя матрицу в степени, но весьма полезно ознакомиться с теоретическим способом нахождения c.

Предположим, что существует c корней, а матрица W неприводима, и пусть $\lambda^n + a_1\lambda^{n_1} + a_2\lambda^{n_2} + \ldots + a_k\lambda^{n_k}$ — характеристический полином матрицы W, где $n > n_1 > n_2 > \ldots > n_k$ и $a_t \neq 0$, $t = 1, 2, \ldots, k$.

Теперь рассмотрим $c = НОД(n - n_1, n_1 - n_2, \ldots, n_{k-1} - n_k)$, где $НОД$ — наибольший общий делитель.

Заметим, что, если $n_k = 0$, то $a_k\lambda^{n_k} = a_k$, и последний терм в $НОД$ равен n_{k-1}.

Например, если задан характеристический полином W в виде: $\lambda_{13} + 2\lambda_{10} + 5\lambda_4$, то $c = 3$, так как $13 - 10 = 3$ и $10 - 4 = 6$. Следовательно, $НОД(3, 6) = 3$. Однако если характеристический полином имеет вид $\lambda_{13} + a_1\lambda_{10} + a_2\lambda_4 + a_3$ и $a_1, a_2, a_3 \neq 0$, то $c = 1$.

3. Если стохастическая матрица W приводима, то условие $(I + W)^{n-1} > 0$ не выполняется, и мы должны рассмотреть характеристическое уравнение для того, чтобы определить, является ли $\lambda_{max} = 1$ простым или

кратным корнем. Если $\lambda_{\max} = 1$ — простой (единственный) корень, мы получим такой же результат, как в случае 1. Если уравнение имеет кратные корни, предельные приоритеты можно получить, используя формулу Сильвестра для корней кратности n_1. Тогда

$$W^{\infty} = \left. \frac{n_1 \dfrac{d^{(n_1-1)}}{d\lambda^{(n_1-1)}} (\lambda I - W)^{-1} \Delta(\lambda)}{\dfrac{d^{n_1}}{d\lambda^{n_1}} \Delta(\lambda)} \right|_{\lambda=1} =$$

$$= n_1 \sum_{k=0}^{n_1} (-1)^k \frac{n_1!}{(n_1-k)!} \frac{\Delta^{(n_1-k)}(\lambda)}{\Delta^{(n_1)}(\lambda)} (\lambda I - W)^{-k-1} \Bigg|_{\lambda=1} =$$

$$= \frac{n_1 \sum\limits_{k=n_1-1}^{n-1} \sum\limits_{h=0}^{k-n_1+1} \dfrac{(k-h)!}{(k-n_1+1-h)!} p_h W^{n-1-k}}{\sum\limits_{h=0}^{n-n_1} p_h \dfrac{(n-h)!}{(n-n_1-h)!}},$$

где $\Delta(\lambda) \equiv \det(\lambda I - W) = \lambda^n + p_1\lambda^{n-1} + \ldots + p_n$, и предельным результатом является полином с W. Это достаточное, но не необходимое условие. В следующем разделе мы увидим, что при работе с иерархиями степень может быть намного меньше той, которую дает приведенная выше формула. Способ возведения матриц в степени был разработан более ста лет назад, когда не было компьютеров. Алгоритмы вычисления характеристического полинома и вычисления собственных значений, приведенные в Приложении 1, в общем случае являются достаточно трудоемкими. Исааксон и Мадсен [5, с. 92] пишут, что применение прямого подхода к вычислению предела приводимой матрицы «на самом деле для многих примеров является почти невозможным». Они предлагают специальную процедуру для решения данной проблемы.

Заметим, что в вычислениях с пределами при умножении обеих частей уравнения в случае приводимой матрицы на $\lim\limits_{k\to\infty} W^k$ левая часть будет оставаться неизменной. В правой части матрица W в высокой степени (так как рассматривается степенной предел) поглотит другие множители, представляющие собой степени W. Тогда можно вынести за скобки общий множитель, оставляя внутри конечную сумму термов, которую можно принять постоянной. Мы можем игнорировать этот постоянный множитель, так как нас интересует соотношение предельных приоритетов в результирующей матрице. Таким образом, для получения результата достаточно возвести матрицу W в большие степени, даже тогда, когда она является приводимой и ациклической.

Программное обеспечение для МАС (*Super Decisions*), разработанное Розан Саати и Уильямом Адамсом, выполняет описанные вычисления автоматически, освобождая пользователя от трудоемкого анализа различных случаев. Сформированная пользователем суперматрица сначала проверяется на приводимость, и если матрица неприводима и отсутствует цикличность, при которой необходимо рассчитывать чезаровскую сумму, то вычисляется результат для примитивной матрицы путем ее возведения в предельные степени. Если матрица оказалась приводимой, то ее снова возводят в большие степени, т. е. на практике во всех случаях суперматрицу возводят в степени, при этом, если возникает цикличность, то вычисляется чезаровская сумма установленных предельных циклических состояний матрицы.

Проведенный анализ сводит все множество возможных случаев к двум. Мы возводим в высокие степени стохастическую матрицу W и наблюдаем при этом за изменением приоритетов. Если результаты возведения матрицы в степени не сходятся к одной матрице, значения элементов в которой последовательно уточняются, мы делаем вывод о наличии цикла, при этом длина цикла определяется экспериментально путем сравнения результатов последовательного возведения матрицы в степени. В случае цикла окончательный результат определяется как чезаровская сумма предельных приоритетов матриц, входящих в цикл.

3-9. Вычисление суперматрицы для иерархий

Рассмотрим представление иерархий с помощью суперматриц.

Лемма: суперматрица иерархии W приводима.

Доказательство: Граф иерархии не является сильно связным, так как в нем отсутствуют дуги, соединяющие нижние узлы с верхними.

Теорема 3-1. Характеристический полином суперматрицы W размерности $(n \times n)$, представляющей иерархию, имеет вид $\lambda^{n_c}(\lambda-1)^{n_a}$, $n_c + n_a = n$, где n_c — число вершин графа, расположенных выше уровня альтернатив, и n_a — число альтернатив на нижнем уровне иерархии.

Доказательство: Рассмотрим разложение в ряд алгебраического дополнения определителя матрицы. В соответствии с леммой, все элементы, расположенные выше главной диагонали матрицы W, могут быть нулевыми, что также справедливо для матрицы $(\lambda I - W)$. Таким образом, кроме $w_{11} = \lambda$, все элементы первой строки нулевые, следовательно, они и их алгебраические дополнения не вносят какого-либо вклада в определитель. Если вычеркнуть первую строку и первый столбец, то верхняя строка оставшейся матрицы снова будет содержать единственный ненулевой элемент $w_{11} = \lambda$. Этот процесс можно продолжить. Отметим, что диагональные элементы, соответствующие альтернативам, равны $(\lambda - 1)$, а все элементы в строке справа от них — нули. Следовательно, определитель матрицы $(\lambda I - W)$ имеет вид, указанный в теореме.

Следствие: Характеристический полином суперматрицы иерархии имеет кратный корень $\lambda_{\max} = 1$, и его кратность равна числу альтернатив.

Теорема 3-2. Обобщенный вектор приоритетов для иерархии, имеющей n уровней, содержится в первом столбце матрицы W^k, $k \geq m - 1$.

Доказательство: Суперматрица m-уровневой иерархии (рис. 3-2), является стохастической, приводимой и ациклической. В этом случае легко видеть, что формула, выведенная для случая 3 в предыдущем параграфе, упрощается и принимает вид $W^{\infty} = W^k$ для $k \geq m - 1$, где

$$W^k = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ W_{m,m-1}W_{m-1,m-2}\cdots W_{32}W_{21} & W_{m,m-1}W_{m-1,m-2}\cdots W_{32} & \cdots & W_{m,m-1}W_{m-1,m-2} & W_{m,m-1} & I \end{Vmatrix}.$$

Путем индукции легко показать, что при умножении блоков в процессе возведения суперматрицы W в степени при достижении значения показателя степени $k = m - 1$ дальнейшее умножение не вызывает изменения результата.

Теорема 3-2 гласит, что иерархическая композиция является результатом возведения суперматрицы W в степени. Она также утверждает, что блоки суперматрицы, соответствующие верхним уровням иерархии, должны быть расположены левее тех, что соответствуют нижним, так как влияние в иерархии передается сверху вниз. Это дает основания считать, что блоки, соответствующие компонентам, ведущим в цикл, будут умножаться справа на блоки, представляющие компоненты цикла, и, в конечном счете, на их предельные приоритеты. Так как предельная матрица является стохастической и имеет идентичные столбцы, ее умножение справа на стохастическую матрицу не будет давать нового результата. Таким образом, в сетях, которые содержат циклы, влияние вдоль пути, ведущего в цикл, сводится на нет и поглощается влияниями внутри цикла, т. е. пути от узлов-источников к циклам не вносят какого-либо вклада в результирующие значения приоритетов элементов сети. Для путей, ведущих от циклов к узлам-стокам (например, альтернативы решения), верно обратное. Это объясняется тем, что матрицы влияния блоков вдоль таких путей умножаются на предельные матрицы циклов слева и поэтому вносят свой вклад в окончательный результат.

Пример приводимой матрицы с множественными корнями: иерархическая композиция на основе суперматрицы

Самый простой пример приводимой суперматрицы (следовательно, случай множественных корней) — это иерархия. На практике структура проблемы принятия решений часто представляется иерархией или элементарной модификацией иерархии, в которой существует цикл обратной связи в некоторой точке, например как в холархии, показанной на рис. 3-3. Если в иерархии используются горизонты времени для целей прогнозирования, они одновременно и влияют, и зависят от критериев, расположенных на нижнем соседнем уровне. В этом случае между двумя верхними уровнями иерархии будет существовать цикл. Поэтому будет проще сначала оценить предельные приоритеты для цикла между двумя уровнями, а затем использовать полученные веса критериев при вычислении приоритетов на нижележащих уровнях иерархии. Рассмотрим суперматрицу W иерархии с двумя критериями и двумя альтернативами под ними, а также суперматрицу $(\lambda I - W)$.

$$W = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0.6 & 1 & 0 \\ 0 & 0.9 & 0.4 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \lambda I - W = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.2 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ -0.8 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -0.1 & -0.6 & -1+\lambda & 0 \\ 0 & -0.9 & -0.4 & 0 & -1+\lambda \end{Vmatrix}.$$

Этот пример соответствует случаю кратных корней, потому что суперматрица иерархии приводима и не имеет циклов. Здесь можно применить два способа вычисления предела. Первый состоит в умножении матрицы W на саму себя. Так как она описывает три компонента (цель, критерии и альтернативы), то достаточно возвести ее в квадрат, чтобы получить искомый результат. Этот же результат мы можем получить по формуле Сильвестра. Второй способ требует бо́льших затрат труда, так как здесь необходимо возвести матрицу в куб. Мы имеем $\Delta(\lambda) = \lambda_5 - 2\lambda_4 + \lambda_3$ и

$$(\lambda I-W)^{-1}=$$

$$=\begin{Vmatrix}
\frac{\lambda^2-2\lambda^3+\lambda^4}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\frac{0.2\lambda-0.4\lambda^2+0.2\lambda^3}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5} & \frac{\lambda^2-2\lambda^3+\lambda^4}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5} & 0 & 0 & 0 \\
\frac{0.8\lambda-1.6\lambda^2+0.8\lambda^3}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5} & 0 & \frac{\lambda^2-2\lambda^3+\lambda^4}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5} & 0 & 0 \\
\frac{-0.5\lambda+0.5\lambda^2}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5} & \frac{-0.1\lambda^2+0.1\lambda^3}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5} & \frac{-0.6\lambda^2+0.4\lambda^3}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5} & \frac{-\lambda^3+\lambda^4}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5} & 0 \\
\frac{-0.5\lambda+0.5\lambda^2}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5} & \frac{-0.9\lambda^2+0.9\lambda^3}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5} & \frac{-0.4\lambda^2+0.4\lambda^3}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5} & 0 & \frac{-\lambda^3+\lambda^4}{\lambda^3-2\lambda^4+\lambda^5}
\end{Vmatrix}.$$

Формула Сильвестра для случая кратных корней дает нам

$$\left.\frac{2B^{(1)}(\lambda)}{\Delta^{(2)}(\lambda)}\right|_{\lambda=1}=W^3=\begin{Vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.5 & 0.1 & 0.6 & 1 & 0 \\
0.5 & 0.9 & 0.4 & 0 & 1
\end{Vmatrix}.$$

Две последних строки и есть результат иерархической композиции, которую мы получаем путем возведения W в квадрат, так как матрица не изменяется при дальнейшем увеличении показателя степени $k > 2$.

Например, для примера из главы 2, в котором рассматривалась задача о покупке дома, мы будем иметь следующую суперматрицу:

Суперматрица для задачи о покупке дома

$$W=\begin{Vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.175 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.062 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.103 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.019 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.034 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.041 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.221 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0.345 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.743 & 0.194 & 0.717 & 0.333 & 0.691 & 0.770 & 0.2 & 0.072 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.194 & 0.063 & 0.066 & 0.333 & 0.091 & 0.068 & 0.4 & 0.649 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0.063 & 0.743 & 0.217 & 0.334 & 0.218 & 0.162 & 0.4 & 0.279 & 0 & 0 & 0
\end{Vmatrix}.$$

$$
(I-W)=\begin{Vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-0.175 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-0.062 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-0.103 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-0.019 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-0.034 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-0.041 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-0.221 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
-0.345 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0 & -0.743 & -0.194 & -0.717 & -0.333 & -0.691 & -0.770 & -0.2 & -0.072 & 1 & 0 & 0\\
0 & -0.194 & -0.063 & -0.066 & -0.333 & -0.091 & -0.068 & -0.4 & -0.649 & 0 & 1 & 0\\
0 & -0.063 & -0.743 & -0.217 & -0.334 & -0.218 & -0.162 & -0.4 & -0.279 & 0 & 0 & 1
\end{Vmatrix}.
$$

$$
(I-W)^{-1}=\begin{Vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.175 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.062 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.103 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.019 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.034 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.041 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.221 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.345 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
0.346 & 0.743 & 0.194 & 0.717 & 0.333 & 0.691 & 0.770 & 0.2 & 0.072 & 1 & 0 & 0\\
0.369 & 0.194 & 0.063 & 0.066 & 0.333 & 0.091 & 0.068 & 0.4 & 0.649 & 0 & 1 & 0\\
0.285 & 0.063 & 0.743 & 0.217 & 0.334 & 0.218 & 0.162 & 0.4 & 0.279 & 0 & 0 & 1
\end{Vmatrix}.
$$

Сравнивая последнюю матрицу с результатами, полученными в главе 2, можно заметить, что глобальные приоритеты альтернатив совпадают с тремя последними элементами первого столбца матрицы. Этот же результат мы получим при возведении в квадрат матрицы W.

$$
W^2=\begin{Vmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0.346 & 0.743 & 0.194 & 0.717 & 0.333 & 0.691 & 0.770 & 0.2 & 0.072 & 1 & 0 & 0\\
0.369 & 0.194 & 0.063 & 0.066 & 0.333 & 0.091 & 0.068 & 0.4 & 0.649 & 0 & 1 & 0\\
0.285 & 0.063 & 0.743 & 0.217 & 0.334 & 0.218 & 0.162 & 0.4 & 0.279 & 0 & 0 & 1
\end{Vmatrix}.
$$

Внутренняя зависимость критериев

Рассмотрим трехуровневую иерархию, включающую цель, критерии и альтернативы. Предположим, что критерии зависят друг от друга. Представление такой иерархии с помощью суперматрицы имеет вид

$$W = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ X & Y & 0 \\ 0 & Z & I \end{Vmatrix},$$

где X — вектор приоритетов критериев относительно цели, Y — матрица собственных векторов, характеризующих зависимости между критериями, и Z — матрица собственных векторов альтернатив по критериям. Матрица W — стохастическая по столбцам, так как получена путем взвешивания матриц-блоков, соответствующих взаимодействиям между уровнями иерархии. Если матрицу W возвести в k-ю степень, получится матрица W^k, которая отражает доминирование превосходства вдоль путей (маршрутов) длиной k:

$$W^k = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ Y^{k-1}X & Y^k & 0 \\ Z\sum_{i=0}^{n-2} Y^i X & Z\sum_{i=0}^{n-1} Y^i & I \end{Vmatrix}.$$

Окончательные приоритеты элементов иерархии дает предел $\lim_{k\to\infty} W^k$, который в данном случае имеет вид:

$$W^\infty = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ Z(I-Y)^{-1}X & Z(I-Y)^{-1} & I \end{Vmatrix}.$$

Заметим, что, если $Y = 0$ и, следовательно, критерии не зависят друг от друга, веса альтернатив вычисляются как ZX, что соответствует результату аддитивной свертки на иерархии. Также, когда Y не нулевая матрица, но содержит значения, близкие к нулю, аддитивная свертка дает хорошее приближение предельных приоритетов и иерархическая композиция остается в силе. Только в тех случаях, когда матрица Y существенно отличается от нуля, следует применять суперматричное решение проблемы. В общем случае, если между критериями нет сильных зависимостей, аддитивная модель дает адекватную оценку приоритетов в иерархии. Если критерии зависят друг от друга, следует применять сетевое представление задачи. Использование модели аддитивной иерархической композиции в таком случае возможно только после пересмотра множества критериев с целью обеспечения их взаимной независимости.

3-10. Согласованность системы

При рассмотрении сетевых задач принятия решений необходимо уметь оценивать согласованность суждений как на линейных маршрутах, ведущих от цели, так и в циклах. При рассмотрении линейных маршрутов следует анализировать исходные, а не предельные приоритеты элементов. Анализируя циклы, необходимо рассматривать предельные приоритеты элементов. Мы должны оценивать степень согласованности с учетом весов соответствующих элементов. Кроме того, нам необходимо знать приоритеты компонентов, которые содержат элементы, влияющие на элементы данного компонента. В завершение мы должны умножить полученные оценки на приоритеты K_C критериев управляющей иерархии. Оценку согласованности сети C_S можно сформировать как

$$C_S = \sum_{\substack{\textit{управляющая}\\ \textit{иерархия}}} K_C \sum_{\textit{маршруты}} \left(\sum_{j=1}^{h} \sum_{i=1}^{n_{ij+1}} w_{ij}\mu_{ij+1} + \sum_{\substack{\textit{управляющие}\\ \textit{критерии}}} K_C \sum_{k=1}^{S} \sum_{j=1}^{n_k} w_{jk} \sum_{h=1}^{|C_h|} w_{(k)(h)}\mu_k(j,h) \right),$$

где n_j, $j = 1, \ldots, h$ — число элементов на j-м уровне; μ_{ij+1} — индекс согласованности всех элементов на $(j + 1)$-м уровне, сравниваемых относительно i-го критерия на j-м уровне. В приведенной формуле $w_{(k)(h)}$ — приоритет влияния h-го компонента на k-й компонент, w_{jk} — предельный приоритет j-го элемента в k-м компоненте, $\mu_k(j, h)$ — индексы согласованности матриц парных сравнений, оценивающих взаимное влияние элементов кластеров. В случае иерархии циклы отсутствуют, поэтому второе слагаемое в скобках будет равно нулю. Как и при оценке согласованности в иерархии, значение индекса C_S нужно разделить на соответствующий индекс случайной оценки согласованности.

3-11. Суждения: их количество и качество

Те, кто будет применять МАС, всегда должны думать о количестве суждений и их обоснованности. Возможно, кто-то предпочел бы не обременять ЛПР подобными проблемами. Иногда ЛПР и аналитики тратят много времени на анализ важного решения, но жалеют своих усилий на подтверждение результатов, которые кажутся им очевидными. Однако в условиях неполной информации без проведения всестороннего анализа вряд ли кто-то сможет доказать, что решение является достаточно обоснованным. Иногда необходима возможность оценить товар «без обертки», для того чтобы понять, стоит ли его покупать. Если игра стоит свеч, то можно затратить время на исследование и обоснование решения, проведя всесторонний и полный анализ проблемы. Какие методы можно применить для ускорения процесса анализа решений, не уменьшая степени их обоснованности? В данном разделе мы попытаемся ответить на этот вопрос.

Для того чтобы контролировать количество необходимых суждений, можно использовать следующие идеи:

1. Хорошие результаты являются следствием хороших суждений, и пока не существует надежного отработанного способа, который позволяет их чем-то заменить. Чем сложнее проблема, тем сложнее ее структура и тем большее количество суждений необходимо. Терпение — это добродетель в любой творческой деятельности.
2. Построить небольшую модель.
3. Уменьшить число компонентов.
4. Уменьшить число элементов в каждом компоненте.
5. Попарно сравнить критерии и подкритерии управляющей иерархии и устранить те, чьи приоритеты близки к нулю, если среди них нет элементов с обратными связями.
6. Осуществить попарное сравнение влияния компонентов друг на друга и вычислить предельные приоритеты суперматрицы. Исключить компоненты, предельные приоритеты которых существенно меньше остальных.
7. Определить приоритеты, применяя визуальное сравнение гистограмм, представляющих предпочтительность элементов. Такая возможность реализована в программном обеспечении, разработанном фирмой *Expert Choice*. Это также можно сделать и другими доступными способами.
8. Если точность доступных знаний не вызывает сомнений, в каждой матрице парных сравнений можно заполнить только одну строку или ввести в матрицу $n - 1$ суждений в произвольных позициях, которые охватывают все объекты.
9. Распределить работу по формированию суждений среди экспертов, специализирующихся в разных областях проблемы. Только самые важные части задачи следует рассматривать группой в полном составе.
10. Объединить выгоды, издержки и риски в каждом суждении и использовать единую модель в процессе дальнейшего анализа.

Наиболее обоснованным научным подходом является применение алгоритма Харкера [6, 7] для неполных суждений и использование метрики нашей шкалы отношений, при этом у экспертов последовательно запрашиваются наиболее важные суждения, которые добавляются в матрицу до тех пор, пока она не будет заполнена. Вот описание этой процедуры.

Метод неполных сравнений

Харкер [6, 7] предложил следующую процедуру:

- Предложить ЛПР выразить суждения так, чтобы, по крайней мере, в каждом столбце матрицы парных сравнений содержалось по одному суждению. При этом получается матрица с рядом неизвестных элементов.
- Ввести нули в клетки, не заполненные суждениями, и прибавить в каждой строке число отсутствующих суждений к диагональному элементу строки, формируя новую матрицу A.
- Вычислить весовые коэффициенты $\boldsymbol{w}$ из уравнения $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{A^k e}{e^T A^k e} = cw$.
- Использовать отношения полученных коэффициентов w_i/w_j в качестве значений для отсутствующих суждений, для того чтобы сделать их совместимыми с имеющимися суждениями.
- Рекомендовать ЛПР сформировать дополнительные суждения, которые оказывают максимальное влияние на вектор $\boldsymbol{w}$. Для ввода таких суждений выбираются элементы матрицы с максимальной суммой абсолютных значений коэффициентов вектора-градиента $\boldsymbol{w}$ по (i, j), вычисленные по следующим формулам:

  $\boldsymbol{x}$ — правый главный собственный вектор (равный $\boldsymbol{w}$), который в МАИ вычисляется из уравнения $A\boldsymbol{x} = \lambda_{\max}\boldsymbol{x}$.

  $\boldsymbol{y}$ — левый главный собственный вектор, который можно определить из уравнения $\boldsymbol{y}^T A = \lambda_{\max}\boldsymbol{y}$.

  $D^A_{\lambda_{\max}} = \left.\dfrac{\partial\lambda_{\max}}{\partial_{ij}}\right|_{i,j} = \dfrac{(y_i x_j)-(y_j x_i)}{a_{ij}^2}$, $j > i$, где $\boldsymbol{y}$ нормализован так, что $\boldsymbol{y}^T\boldsymbol{x} = 1$. Если $a_{ij} = 0$, то оно замещается соответствующим отношением w_i/w_j из $\boldsymbol{w}$.

  Тогда $D^A_x = \left.\dfrac{\partial\boldsymbol{x}}{\partial_{ij}}\right|_{i>j}$ есть матрица частных производных вектора $\boldsymbol{x}$, которая вычисляется как $\left[\left(\tilde{A}-\lambda_{\max}\tilde{I}\right)^{-1}\right]\left[\tilde{D}^A_{\lambda_{\max}} x - \tilde{z}\right]$, где I — еди-
  $\quad 0$
  $\boldsymbol{e}$

ничная матрица размерности $n \times n$; $\boldsymbol{e}$ — единичный вектор-строка размерности n; $z = \{z_k\}$ — вектор-столбец размерности n, определяемый следующим образом:

$$z_k = \begin{cases} x_j, & \text{если } k = i, \\ {-x_i}/{a_{ij}^2}, & \text{если } k = j, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Символом $\tilde{}$ обозначены матрицы или векторы, в которых удалена последняя строка; D_x^A — вектор-столбец, чьи элементы могут быть положительными или отрицательными, а их сумма равна нулю.

- Определить элемент вектора-градиента, который является слишком большим по сравнению с соответствующим элементом собственного вектора. Например, прибавление большого отрицательного значения градиента к малому значению элемента собственного вектора может давать отрицательное значение. Если такой элемент существует, нужно подобрать масштаб (например, 50 %) и применить его ко всем элементам градиента, соответствующим неопределенным значениям.
- Если среди элементов вектора-градиента требуется модификация нескольких элементов, то следует выбрать значение с самым малым масштабом, чтобы применить его ко всем элементам вектора-градиента. Это гарантирует неотрицательность элементов нового собственного вектора, который будет вычислен после масштабирования значений.
- Вычислить новые собственные векторы для каждого отсутствующего значения путем поэлементного сложения вектора-градиента с самым последним приближением собственного вектора.
- Выполнить оценку совместимости каждого из новых собственных векторов, представляющих отсутствующие значения (например, p_{ij}), с самым последним приближением собственного вектора w. При этом необходимо:

  – построить матрицу отношений для p_{ij} и $\boldsymbol{w}$;

  – вычислить метрику $D(i, j)$ для каждого отсутствующего значения: $D(i,j) = \frac{1}{n^2} e^T P_{ij} \circ W^T e$, где n — число элементов в компоненте; e — единичный вектор-столбец; P_{ij} — матрица отношений для p_{ij}; W^T — транспонированная матрица отношений значений $\boldsymbol{w}$; $\boldsymbol{e}^T$ — единичный вектор-строка.

- Отсутствующие значения упорядочить по значениям метрики.
- Запросить у ЛПР суждение о сравнении элементов с самым большим значением метрики.
- ЛПР может остановить или продолжить процесс в зависимости от того, удовлетворяет ли результат сравнения метрик нового и старого собственных векторов предельному значению 1.1, которое было обосновано в параграфе 2-14. Следует помнить, что избыточность суждений необходима для того, чтобы гарантировать значимость результата, поэтому от экспертов может потребоваться добавление более одного дополнительного суждения.

Пример

Рассмотрим матрицу исходных суждений, приведенную в табл. 3-1.

Таблица 3-1

Набор исходных суждений

	A	*B*	*C*	*D*
A	1	2	1/7	5
B	1/2	1	0	0
C	7	0	1	0
D	1/5	0	0	1

Применяя описанную выше процедуру Харкера к этой матрице, мы будем иметь информацию для начальных вычислений, которая показана в табл. 3-2.

Таблица 3-2

Начальные вычисления

Элемент	Градиент, абсолютная сумма	Метрика отношения
(1, 2)	0.0271	1.0081
(1, 3)	0.8739	1.8466
(1, 4)	0.0104	1.0013
(2, 3)	**1.4241**	**8.4838**
(2, 4)	0.0111	1.0051
(3, 4)	0.0025	1.0000

Пользователю следует предложить сформировать суждение в позиции (2, 3), для которой значение метрики является максимальным. Предположим, что он ввел суждение 1/5, тогда получится новая матрица, приведенная в табл. 3-3.

Таблица 3-3

Новый набор суждений

	A	*B*	*C*	*D*
A	1	2	1/7	5
B	1/2	1	1/5	0
C	7	5	1	0
D	1/5	0	0	1

Следующий этап вычислений показан в табл. 3-4, откуда видно, что теперь нужно сформировать суждение в позиции (3, 4), потому что для элемента (1, 4) уже есть экспертное суждение. Предположим, что для нового суждения вводится оценка 8. Вычислим собственный вектор и проверим его совместимость с предыдущим собственным вектором. Если они будут достаточно близкими, то на этом можно остановиться, в противном случае процесс необходимо продолжить. Таким образом, успешная работа данного алгоритма основана на постоянном уточнении суждений.

Таблица 3-4

Второй этап вычислений

Элемент	Градиент, абсолютная сумма	Метрика отношения
(1, 2)	0.4261	15.0431
(1, 3)	1.2518	1.4560
(1, 4)	0.3994	2.9926
(2, 3)	0.6131	1.1385
(2, 4)	0.3859	2.2172
(3, 4)	**0.3962**	**2.9019**

3-12. Обратная связь может изменить приоритет элемента

Следующий пример иллюстрирует, как элемент e_{12}, имеющий низкий приоритет по сравнению с другими в компоненте (табл. 3-5), но имеющий

Таблица 3-5

Суперматрица собственных векторов

	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{21}	e_{22}	e_{31}	e_{32}	e_{41}	e_{42}
e_{11}	0.021	0.025	0.028	0.025	0.018	0.022	0.026	0.020	0.028
e_{12}	0.005	0.005	0.005	0.189	0.245	0.243	0.225	0.241	0.246
e_{13}	0.223	0.220	0.217	0.119	0.071	0.068	0.082	0.073	0.059
e_{21}	0.219	0.214	0.222	0.000	0.000	0.277	0.277	0.222	0.250
e_{22}	0.031	0.036	0.028	0.000	0.000	0.056	0.056	0.111	0.083
e_{31}	0.208	0.214	0.214	0.266	0.276	0.000	0.000	0.250	0.286
e_{32}	0.042	0.036	0.036	0.067	0.056	0.000	0.000	0.083	0.048
e_{41}	0.188	0.219	0.219	0.278	0.278	0.267	0.278	0.000	0.000
e_{42}	0.063	0.031	0.031	0.056	0.056	0.067	0.056	0.000	0.000

Таблица 3-6

Предельная суперматрица

	e_{11}	e_{12}	e_{13}	e_{21}	e_{22}	e_{31}	e_{32}	e_{41}	e_{42}
e_{11}	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024	0.024
e_{12}	0.159	0.159	0.159	0.159	0.159	0.159	0.159	0.159	0.159
e_{13}	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125	0.125
e_{21}	0.183	0.183	0.183	0.183	0.183	0.183	0.183	0.183	0.183
e_{22}	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047	0.047
e_{31}	0.187	0.187	0.187	0.187	0.187	0.187	0.187	0.187	0.187
e_{32}	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044	0.044
e_{41}	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193	0.193
e_{42}	0.038	0.038	0.038	0.038	0.038	0.038	0.038	0.038	0.038

существенное влияние на элементы в других компонентах, получает высокое значение обобщенного предельного приоритета (табл. 3-6).

Суть идеи состоит в следующем: на первый взгляд можно интуитивно полагать, что элемент, имеющий незначительное влияние в рамках компонента, является мало значимым в целом, но в МАС такой элемент может оказаться наиболее важным. В табл. 3-5, 3-6 мы приводим исходную и предельную суперматрицы абстрактной сетевой задачи. Данный пример демонстрирует следующее важное отличие сетевых задач от иерархических: в иерархиях может не учитываться влияние подкритериев и альтернатив, расположенных под критерием с низким приоритетом, но при наличии обратных связей, т. е. в сетях, так поступать нельзя, поскольку важность незначительного критерия может увеличиться в результате циклических и предельных операций.

3-13. Аксиомы

Для полного представления о теории МАИ и МАС мы приводим аксиомы из десятой главы моей книги по принятию решений [7]. Подробное описание аксиом и выведенных из них результатов читатель может найти в указанной книге, здесь мы дадим лишь краткий обзор.

Пусть **U** — конечный набор из n элементов, называемых альтернативами, а **G** — набор свойств или признаков, по которым сравниваются элементы из **U**. Свойствами будем называть специфические черты, которыми обладает объект или индивидуум, даже если мы не осведомлены об этом, в то время как признак — это качество (черта, особенность), которую мы приписываем некоторому объекту. Здесь мы предполагаем, что свойства и признаки взаимозаменяемы, и в общем случае их можно отнести к критериям. Критерий — это элементарное понятие.

Когда два объекта или элемента из **U** сравниваются по критерию C из множества **G**, мы называем это парным сравнением. Пусть символ $\underset{C}{>}$ означает бинарное отношение на **U**, представляющее предпочтение или доминирование одного объекта над другим по критерию C из **G**. Введем бинарное отношение безразличия $\underset{C}{\approx}$, характеризующее отсутствие предпочтения по критерию C из **G**. Следовательно, если заданы два элемента A_i, $A_j \in \mathbf{U}$, то они могут состоять в каком-либо из отношений $A_i \underset{C}{>} A_j$ или $A_j \underset{C}{>} A_i$, $A_i \underset{C}{\approx} A_j$, $A_j \underset{C}{\approx} A_i$ по каждому из критериев $C \in \mathbf{G}$. Мы будем использовать обозначения $A_i \underset{C}{\geq} A_j$ для выражения предпочтения или безразличия. Семейство бинарных отношений $\underset{C}{>}$ по критерию C из **G** — элементарное понятие. Мы будем его применять для вывода понятий приоритета, или важности, как по одному критерию, так и по нескольким.

Пусть **B** — множество отображений из области $\mathbf{U} \times \mathbf{U}$ в $\mathbf{R}^+$ (множество положительных действительных чисел), и f: $\mathbf{G} \to \mathbf{B}$, $P_C \in f(C)$ для $C \in \mathbf{G}$. P_C определяет положительное вещественное число для каждой пары $(A_i, A_j) \in \mathbf{U} \times \mathbf{U}$. Пусть $P_C(A_i, A_j) \equiv a_{ij} \in \mathbf{R}^+$, A_i, $A_j \in \mathbf{U}$. Для каждого $C \in \mathbf{G}$ тройка $(\mathbf{U} \times \mathbf{U}, \mathbf{R}^+, P_C)$ представляет фундаментальную, или элементарную шкалу. Фундаментальная шкала — это отображение объектов в числовую систему.

Определение: Для всех $A_i, A_j \in \mathbf{U}$ и $C \in \mathbf{G}$ $A_i \underset{C}{>} A_j$ тогда и только тогда, когда $P_C(A_i, A_j) > 1$, $A_i \underset{C}{\approx} A_j$ тогда и только тогда, когда $P_C(A_i, A_j) = 1$.

Если $A_i \underset{C}{>} A_j$, то говорят, что A_i доминирует A_j по критерию $C \in \mathbf{G}$. Таким образом, P_C представляет интенсивность или силу предпочтения одной альтернативы перед другой.

АКСИОМА ОБРАТНОЙ СИММЕТРИИ

Аксиома 1: Для всех A_i, $A_j \in \mathbf{U}$ и $C \in \mathbf{G}$ справедливо

$$P_C(A_i, A_j) = 1/P_C(A_j, A_i).$$

Всякий раз, когда мы делаем парные сравнения, мы должны рассмотреть обе составляющие пары, чтобы судить об относительном значении. Меньшая или менее предпочтительная составляющая идентифицируется первой и используется как единица измерения для рассматриваемого критерия. Тогда вторая составляющая оценивается как целое или рациональное число, на которое умножена эта единица. Например, если в процессе оценивания полагают, что вес одного камня в пять раз больше второго, то второй автоматически считается в пять раз легче первого, потому что он был взят за единицу при формировании первого суждения. Матрицы, которые мы рассматриваем, заполняются результатами обратно симметричных парных сравнений. Они представляют собой простые и в то же время мощные средства для решения многокритериальных проблем.

Пусть $A = \{a_{ij}\} = P_C(A_i, A_j)$ — множество парных сравнений альтернатив по критерию $C \in \mathbf{G}$. В соответствии с аксиомой 1, матрица A является положительной и обратно симметричной. Наша цель состоит в том, чтобы получить шкалу относительного доминирования (или ранговый порядок) альтернатив на основе парных сравнений, заданных в матрице A.

Существует естественный способ для того, чтобы упорядочить множество альтернатив по относительному доминированию на основе матрицы парных сравнений A.

Определение: Пусть $R_{M(n)}$ — множество положительных обратно симметричных матриц размерности $n \times n$ $A = \{a_{ij}\} \equiv P_C(A_i, A_j)$ для всех критериев $C \in \mathbf{G}$, и пусть $[0, 1]^n$ является декартовым произведением n непрерывных множеств $[0, 1]$, а $\psi(A)$ — n-мерный вектор, компоненты которого расположены на отрезке $[0, 1]$. Пусть $\psi(A)$: $R_{M(n)} \to [0, 1]^n$ для $A \in R_{M(n)}$. Тройка $(R_{M(n)}, [0, 1]^n, \psi)$ представляет производную шкалу, которая является отображением одной относительной числовой системы в другую такую же систему.

Важно отметить, что ранговый порядок, который дает производная шкала ψ, может не совпадать с порядком, задаваемым парными сравнениями. Пусть $\psi_i(A)$ является i-м компонентом $\psi(A)$ и выражает относительное доминирование i-й альтернативы. По определению для A_i, $A_j \in \mathbf{U}$, отношение $A_i \underset{C}{>} A_j$ подразумевает $P_C(A_i, A_j) > 1$. Однако при $P_C(A_i, A_j) > 1$ производная шкала может давать неравенство $\psi_j(A) > \psi_i(A)$. Такое может происходить, если не сохраняется доминирование в строках, т. е. для A_i, $A_j \in \mathbf{U}$ и $C \in \mathbf{G}$ условие $P_C(A_i, A_j) \geq P_C(A_i, A_k)$ не выполняется для всех $A_k \in \mathbf{U}$. Другими словами, это происходит, когда $P_C(A_i, A_j) > 1$, и для некоторого $A_k \in \mathbf{U}$ мы имеем $P_C(A_i, A_k) < P_C(A_j, A_k)$.

Более жестким условием является следующее:

Определение: Говорят, что отображение P_C является согласованным тогда и только тогда, когда $P_c(A_i, A_j)P_c(A_j, A_k) = P_c(A_i, A_k)$ для всех i, j, k. Аналогично, матрица A является согласованной тогда и только тогда, когда $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$ для всех i, j, k.

Если отображение P_C является согласованным, то аксиома 1 выполняется автоматически и ранговый порядок, который обеспечивает производная шкала ψ, совпадает с порядком, полученным на основе парных сравнений.

Луис Варгас предложил использовать вместо аксиомы обратной симметрии приведенную ниже аксиому «поведенческой» независимости. При этом свойство обратной симметрии выражается теоремой. Однако отношение обратной симметрии не влечет за собой независимости в том смысле, как он ее определяет. Поэтому аксиому независимости можно не учитывать, если кому-то это угодно, но аксиому обратной симметрии следует сохранить.

Аксиома 1′: Все альтернативы в $\mathbf{U}$ являются независимыми.

Две альтернативы A_i и A_j считаются взаимно независимыми относительно критерия $C \in \mathbf{G}$ тогда и только тогда, когда для любого A_k парные сравнения компонентов $\{A_i, A_j\}$ с A_k удовлетворяют следующим условиям:

$$P_C[\{A_i, A_j\}, A_k] = P_C(A_i, A_k)P_C(A_j, A_k)$$

и

$$P_C[A_k, \{A_i, A_j\}] = P_C(A_k, A_i)P_C(A_k, A_j).$$

Множество альтернатив считается независимым, если все входящие в него альтернативы взаимно независимы.

Аксиомы иерархии

Определение: Частично упорядоченным множеством называется множество $\mathbf{S}$ с бинарным отношением $\leq$, которое удовлетворяет следующим условиям:

а) *Рефлексивность*: для всех $x \in \mathbf{S}$, $x \leq x$;

б) *Транзитивность*: для всех $x, y, z \in \mathbf{S}$, если $x \leq y$ и $y \leq z$, то $x \leq z$;

в) *Антисимметричность*: для всех $x, y, z \in \mathbf{S}$, если $x \leq y$ и $y \leq x$, то $x = y$ (x и y совпадают).

Определение: Для любого отношения $x \leq y$ (которое следует читать: y *включает* x) определим отношение $x < y$, которое подразумевает, что $x \leq y$ и $x \neq y$. Говорят, что y покрывает (доминирует) x, если $x < y$ и если неравенство $x < t < y$ не выполняется ни для какого t.

Удобным способом представления частично упорядоченных множеств с конечным числом элементов являются ориентированные графы. Элементы множества представляются вершинами графа, а дуги ориентированы от y к x, если $x < y$.

Определение: Говорят, что подмножество $\mathbf{E}$ частично упорядоченного множества $\mathbf{S}$ *ограничено сверху* (снизу), если существует элемент $s \in \mathbf{S}$, такой что $x \leq s$ ($\geq s$) для любого $x \in \mathbf{E}$. Элемент s называется верхней (нижней) границей множества $\mathbf{E}$. Мы будем говорить, что $\mathbf{E}$ имеет верхнюю (нижнюю) грань, если оно имеет верхнюю (нижнюю) границу, и если множество верхних $\mathbf{H}$ (нижних $\mathbf{L}$) границ имеет элемент h_1 (l_1), такой что $h_1 \leq h$ для всех $h \in \mathbf{H}$ ($l_1 \geq l$ для всех $l \in \mathbf{L}$).

Определение: Пусть $\mathbf{Q}$ — конечное частично упорядоченное множество с максимальным элементом $q_{\max}$. Множество $\mathbf{Q}$ является иерархией, если выполняются следующие условия:

1. Существует разбиение $\mathbf{Q}$ на множества, называемые уровнями $\{\mathbf{L}_k = 1, 2, \ldots, K\}$, где $\mathbf{L}_1 = \{q_{\max}\}$.
2. $x \in \mathbf{L}_k$ означает, что $x^{-} \subseteq \mathbf{L}_{k+1}$, где $x^{-} = \{y | \ x$ покрывает $y\}$, $k = 1, 2, \ldots, K-1$.
3. $x \in \mathbf{L}_k$ означает, что $x^{+} \subseteq \mathbf{L}_{k-1}$, где $x^{+} = \{y | \ y$ покрывает $x\}$, $k = 2, 3, \ldots, K$.

Определение: Для заданного положительного действительного числа $\rho \geq 1$ непустое множество $x^{-} \subseteq \mathbf{L}_{k+1}$ называется ρ-однородным относительно $x \in \boldsymbol{L}_k$, если для каждой пары элементов $y_1, y_2 \in x^{-}$ выполняется условие $1/\rho \leq P_C(y_1, y_2) \leq \rho$. В частности, аксиома обратной симметрии подразумевает, что $P_C(y_i, y_i) = 1$.

Аксиома 2: Для заданной иерархии $\mathbf{Q}$, $x \in \mathbf{Q}$ и $x \in \mathbf{L}_k$ подмножество $x^{-} \subseteq \mathbf{L}_{k+1}$ является ρ-однородным для $k = 1, \ldots, K-1$.

Однородность важна при сравнении похожих объектов, так как люди часто делают большие ошибки при сравнении несоизмеримых вещей. Например, нам трудно сравнить по размеру песчинку с апельсином. Когда объекты сильно различаются, их можно распределить по группам в соответствии с однородностью и (или) сопоставимостью их свойств, что приводит к идее декомпозиции на иерархические уровни. Аксиома однородности тесно связана с известным правилом Архимеда, которое гласит, что для двух вещественных чисел x и y, $x < y$, существует такое целое число n, что $nx \geq y$, или $n \geq y/x$.

Понятия фундаментальной и производной шкалы можно распространить на элементы $x \in \mathbf{L}_k$, $x^{\sim} \subseteq \mathbf{L}_{k+1}$, заменяя $\mathbf{G}$ на $\mathbf{U}$. Производная шкала, выведенная из сравнения элементов $x^{\sim}$ относительно элементов x, называется локальной производной шкалой или шкалой локальных приоритетов. Она получается без включения каких-либо *непричастных* альтернатив в процесс сравнения; таким альтернативам присваиваются нулевые значения.

При заданных множествах $\mathbf{L}_k$, $\mathbf{L}_{k+1} \subseteq \mathbf{Q}$, обозначим локальную производную шкалу для $y \in x^{\sim}$ и $x \in \mathbf{L}_k$ через $\psi_{k+1}(y|x)$, $k = 2, 3, \ldots, K - 1$. Не утрачивая общности, мы можем принять что $\sum_{y \in x} y - \psi_{k+1}(y \mid x) = 1$. Рассмотрим матрицу $\psi_k(\mathbf{L}_k|\mathbf{L}_{k-1})$, столбцы которой являются локальными производными шкалами элементов в $\mathbf{L}_k$ относительно элементов из $\mathbf{L}_{k-1}$.

Определение: Говорят, что множество $\mathbf{U}$ имеет внешнюю зависимость от множества $\mathbf{G}$, если на $\mathbf{U}$ может быть определена фундаментальная шкала для каждого элемента из множества $\mathbf{G}$.

Декомпозиция проблемы подразумевает распределение отдельных элементов по компонентам или уровням. В свою очередь, это означает, что элементы зависят от родительских компонентов, которым они принадлежат, и от внешних элементов, объединенных в другие компоненты. Процесс установления связей между элементами одного уровня иерархии (например, альтернативами) и элементами следующего более высокого уровня (критериями) выражает внешние зависимости элементов нижних уровней от элементов более высоких уровней. В соответствии с выявленными связями осуществляются парные сравнения одних элементов относительно других. Эта процедура повторяется для каждой пары смежных уровней иерархии путем движения снизу вверх, т. е. от альтернатив к главной цели.

Элементы одного уровня могут быть взаимозависимыми относительно свойства (критерия), представленного элементом другого уровня. Например, идею внутренней зависимости между элементами одного уровня иерархии иллюстрирует зависимость между потребляемой и выпускаемой продукцией разных отраслей промышленности.

Формально внутреннюю зависимость можно представить следующим образом.

Определение: Пусть множество $\mathbf{U}$ зависит от внешнего множества $\mathbf{G}$. Говорят, что элементы множества $\mathbf{U}$ имеют внутреннюю зависимость относительно элемента $C \in \mathbf{G}$, если для некоторых $A \in \mathbf{U}$, $\mathbf{U}$ является внешне зависимым от A.

Аксиома 3: Пусть $\mathbf{Q}$ — иерархия с уровнями $\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2, \ldots, \mathbf{L}_K$. Для каждого $\mathbf{L}_k$, $k = 1, 2, \ldots, K-1$, справедливы следующие утверждения:

1. $\mathbf{L}_{k+1}$ внешне зависит от $\mathbf{L}_k$;
2. $\mathbf{L}_k$ внешне не зависит от $\mathbf{L}_{k+1}$;
3. $\mathbf{L}_{k+1}$ не содержит внутренних зависимостей для любого $x \in \mathbf{L}_k$.

Принцип иерархической композиции

Если соблюдается аксиома 3, производная шкала (ранговый порядок) любого уровня в иерархии $\mathbf{Q}$ описывается соответствующим вектором из следующего набора:

$$\begin{aligned}
&\psi_1(q_{\max}) = 1;\\
&\psi_2(\mathbf{L}_2) = \psi_2(q|q_{\max});\\
&\quad\vdots \qquad \vdots\\
&\psi_k(\mathbf{L}_k) = \psi_k(\mathbf{L}_k|\mathbf{L}_{k-1}),\ \psi_{k-1}(\mathbf{L}_{k-1});\ k = 3, \ldots, K.
\end{aligned}$$

Если не соблюдается аксиома 3, то рассматриваемая структура не является иерархией, т. е. в ней могут существовать внешние и внутренние зависимости между уровнями или компонентами, и принцип иерархической композиции применять нельзя. При наличии зависимостей применяется другой принцип композиции на основе суперматричного подхода, частным случаем которого является принцип иерархической композиции.

Иерархия является частным случаем системы, определяемой следующим образом.

Определение: Пусть $\mathfrak{C}$ — семейство непустых множеств $\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots, \mathbf{G}_n$, где $\mathbf{G}_i$ состоит из элементов $\{e_{ij}, j = 1, \ldots, m_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. $\mathfrak{C}$ является системой, если его можно представить ориентированным графом, вершинами которого являются $\mathbf{G}_i$, а дуги определены через концепцию внешней зависимости. Таким образом, между двумя заданными компонентами $\mathbf{G}_i$ и $\mathbf{G}_j \in \mathfrak{C}$ имеется направленная дуга от $\mathbf{G}_i$ к $\mathbf{G}_j$, если $\mathbf{G}_j$ внешне зависит от $\mathbf{G}_i$.

Аксиома 3′: Пусть $\mathfrak{C}$ — система, состоящая из подмножеств $C_1, C_2, \ldots, C_n$. Для каждого C_i существует некоторое C_j такое, что либо C_i внешне зависит от C_j, либо C_j внешне зависит от C_i, либо оба внешне зависят друг от друга.

Заметим, что C_i может внешне зависеть от C_i, что эквивалентно внутренней зависимости в иерархии. В действительности аксиома 3′ будет адекватно описывать ситуацию, даже если не включать в рассмотрение аксиому 3. Мы выделили последнюю в связи с особой важностью иерархических структур, которые в настоящее время имеют более широкое практическое применение, чем системы с обратной связью.

Многие из понятий, определенных для иерархий, остаются в силе для систем с обратной связью. Главным отличием сетеых структур является наличие зависимостей между элементами. Для количественной характеристики таких зависимостей используются весовые коэффициенты, которые мы определим сделующим образом.

Пусть $\mathbf{D}_A \subseteq \mathbf{U}$ — множество элементов $\mathbf{U}$, которые внешне зависят от $A \in \mathbf{U}$, и пусть $\psi_{A_i,C}(A_j)$, $A_j \in \mathbf{U}$, — производные шкалы элементов множества $\mathbf{U}$ относительно $A_j \in \mathbf{U}$ по критерию $C \in \mathbf{G}$. Шкала $\psi_C(A_j)$, $A_j \in \mathbf{U}$ является производной шкалой элементов $\mathbf{U}$ по критерию $C \in \mathbf{G}$. Весовой коэффициент внутренней зависимости $\phi_C(A_j) = \sum\limits_{A_i \in D_{A_j}} \psi_{A_i,C}(A_j)\psi_C(A_i)$.

Если элементы множества $\mathbf{U}$ внутренне зависят относительно $C \in \mathbf{G}$, то $\psi_C(A_i) \neq \psi_C(A_j)$ для некоторого $A_j \in \mathbf{U}$.

Ожидания

Интуитивные ожидания определяют доверие ЛПР к ранговому порядку альтернатив, который получен на основе априорных знаний. Предположим, что ЛПР имеет интуитивное представление о том, каким должно быть ранжирование конечного набора альтернатив из множества $\mathbf{U}$ по множеству критериев $\mathbf{G}$.

Аксиома 4:

1. *Полнота*: $\mathbf{G} \subset \mathbf{Q} - \mathbf{L}_K$, $\mathbf{U} = \mathbf{L}_K$.
2. *Порядок*: Порядок сохраняется независимо от того, сколько и каких других альтернатив может присутствовать в $\mathbf{U}$. Или наоборот, на порядок может влиять число и оценки альтернатив, которые добавляются к множеству $\mathbf{U}$ или удаляются из него.

Эта аксиома говорит о том, что индивидуумы, осознающие причины своих убеждений, должны удостовериться, что их идеи правильно представлены для получения результата, который будет соответствовать их ожиданиям (т. е. в том, что все важные критерии включены в иерархию). Здесь не делается предположений ни о рациональности процесса, ни о том, что он пригоден только для рациональных суждений. Люди могут иметь ожидания, которые могут выглядеть нерациональными в другой системе ценностей. Данная аксиома говорит также о том, что порядок альтернатив может зависеть от ожиданий ЛПР и от природы проблемы принятия решений.

Литература

1. *Saaty T. L.* The Brain, Unraveling the Mystery of How It Works: The Neural Network Process. RWS Publications, 4922 Ellsworth Avenue, Pittsburgh, PA 15213, 2000.
2. *Dickson L. E.* New First Course in the Theory of Equations. New York. John Wiley & Sons, Inc., 1939.
3. *Fraser R. A., Duncan W. J. and Collar A. R.* Elementary Matrices. London: Cambridge University Press, 1955.
4. *Horn R. A., and Johnson C. R.* Matrix Analysis. Cambridge University Press, 1992.
5. *Isaacson D. L., and Madsen R. W.* Markov Chains: Theory and Applications. New York: John Wiley & Sons, 1976.
6. *Harker P. T.* Incomplete Pairwise Comparisons in the Analytic Hierarchy Process // Mathematical Modeling. 1987. 9/11. P. 837–848.
7. *Harker P. T.* Alternative Modes of Questioning in the Analytic Hierarchy Process // Mathematical Modeling. 1987. 9. P. 353–360.

Глава 4

Элементарные примеры

Homo Supermatricus — люди будущего — будут принимать ответственные решения с использованием суперматриц.

4-1. Введение

В этой главе мы продемонстрируем применение теории суперматриц на элементарных примерах, преследуя две цели. Первая состоит в том, чтобы показать, как формировать суперматрицу и находить ее предел. Вторая цель — продемонстрировать обоснованность данного подхода к задачам принятия решений с обратной связью и показать, что широко используемый метод анализа иерархий является частным случаем подхода на основе суперматрицы, а полученные результаты подтверждаются практикой и вполне соответствуют реальности.

В каждом примере мы проводим парные сравнения, вычисляем собственные векторы и формируем из них суперматрицу. Если эта суперматрица является стохастической по столбцам, мы возводим ее в степени, чтобы получить окончательный результат. В противном случае мы определяем веса компонентов согласно их влиянию на другие компоненты и затем используем полученные собственные векторы для взвешивания соответствующих блоков суперматрицы. После этого мы возводим взвешенную суперматрицу в степени и получаем решение. Если при возведении стохастической суперматрицы в степени наблюдается цикличность, мы либо вычисляем среднее значение пределов в цикле (чезаровскую сумму), либо берем в качестве результата предельную степень, которая соответствует исходному расположению блоков в суперматрице. Значения предельных приоритетов альтернатив относительно главной цели находятся в первом столбце предельной суперматрицы.

Мы должны предупредить читателя о том, что при приведении суперматрицы к стохастическому виду может возникнуть необходимость повторной нормализации столбцов после умножения блоков на приоритеты компонентов. Это требуется в тех случаях, когда в исходной суперматрице присутствуют нулевые элементы, свидетельствующие об отсутствии влияния одних элементов на другие. При этом возникает проблема, связанная с определением весовых коэффициентов компонентов, в которых не все элементы оказывают влияние на элементы других компонентов.

В тех случаях, когда компонент альтернатив является узлом-стоком, куда потоки входят, но ни один не выходит, его можно включить в суперматрицу, если существует внутренняя зависимость между альтернативами ними или решается задача распределения ресурсов. В противном случае, альтернативы можно не включать в суперматрицу, применяя для их оценки идеальный способ измерения и синтезируя глобальные приоритеты альтернатив путем умножения их оценок на вектор предельных приоритетов критериев. Ниже рассматриваются примеры, в которых альтернативы присутствуют в суперматрице.

В суперматрице учитываются как внешние, так и внутренние зависимости компонентов. Внутренние зависимости — это зависимости между элементами одного компонента. Такие зависимости выражены элементами матриц-блоков, размещенных на главной диагонали суперматрицы. Собственные векторы в каждом блоке получаются на основе парных сравнений. Все парные сравнения проводятся так, чтобы оценить степень влияния двух элементов, принадлежащих одному компоненту, на третий элемент в том же компоненте относительно заданного управляющего критерия. Взаимное влияние компонентов сети, также как и элементов, оценивается путем парных сравнений по управляющему критерию.

Узлы-циклы сети решений можно разделить на два типа. Первый тип — это циклы независимости, которые характерны для нижнего уровня иерархии или для узлов-стоков. Они отражают зависимости элементов данного компонента только от самих себя. Такому типу зависимости соответствует единичная матрица-блок на главной диагонали суперматрицы. Если подобный цикл присутствует в компоненте альтернатив, то в результате синтеза приоритеты альтернатив появятся в суперматрице под всеми остальными элементами иерархии. Второй вид циклов — это циклы зависимости, представляющие взаимную зависимость между элементами данного компонента. В этом случае в матрицу-блок на главной диагонали записываются векторы приоритетов влияния каждого элемента данного компонента на все остальные элементы относительно цели или критерия управляющей иерархии. При парных сравнениях следует задавать вопрос:

какой из двух сравниваемых элементов сильнее влияет на заданный третий элемент в смысле управляющего критерия? Из сравнений выводятся собственные векторы в шкале отношений, которые записываются в столбцы матрицы-блока на главной диагонали суперматрицы, соответствующей данному циклическому компоненту.

В этой главе мы сначала рассмотрим иерархический пример о выборе школы. Затем проиллюстрируем неприводимый и непримитивный (циклический) случай двумя примерами: примером о покупке автомобиля и примером прогнозирования даты наступления благоприятных изменений в экономике США. Далее на примере о прогнозировании доли рынка компании ресторанов быстрого питания мы рассмотрим неприводимую примитивную суперматрицу, характеристическое уравнение которой имеет простой корень $\lambda_{max} = 1$ (циклы отсутствуют). На этом же примере будет проиллюстрирован случай приводимой матрицы с простым корнем уравнения $\lambda_{max} = 1$. Во всех примерах мы будем возводить суперматрицу в целочисленные степени. Читатели, незнакомые с теорией матриц, могут не вникать в технические подробности, а рассматривать только смысл приложений.

4-2. О распределении влияния

В задачах принятия решений анализ влияния может выполняться двумя способами. В соответствии с первым, по каждому критерию определяются и упорядочиваются приоритеты элементов, подверженных влиянию других элементов (среди которых могут присутствовать и оцениваемые элементы). В этом случае задают вопрос: на какой из двух сравниваемых элементов заданный элемент влияет больше в смысле заданного критерия и насколько больше? Второй способ заключается в ранжировании элементов по силе их влияния или воздействия на другие элементы. При этом вопрос формулируется следующим образом: какой из двух сравниваемых элементов влияет или вносит больший вклад в заданный элемент в смысле рассматриваемого критерия и насколько больший?

В любой конкретной задаче собственные векторы, полученные из парных сравнений, должны передавать одно и то же направление и одинаковый смысл влияния. Не существует каких-либо причин, мешающих подойти к анализу проблемы любым из этих способов.

Что касается влияния, то можно полагать, что элемент может влиять сам на себя в отношении всех свойств больше, чем любой другой элемент. Но это далеко не всегда так. Например, угольная промышленность влияет на производительность и рентабельность электроэнергетики в гораздо большей степени, чем сама электроэнергетика влияет на себя, так как для производства электроэнергии она использует очень небольшую долю своей продукции, а в основном использует уголь (или нефть). Изучение отношений влияния требует не только знаний о реальном мире, но также аналитических способностей, необходимых для идентификации отношений, и развитого воображения для проведения анализа. МАС ставит в общем виде те же самые вопросы, которые мыслящий человек задает в процессе принятия решений.

Приведем еще одно наблюдение, касающееся влияния одних компонентов на другие компоненты и на элементы в них. Компонент — абстрактное понятие, которое представляет группу элементов с учетом их взаимодействия. То есть под компонентом подразумевается множество элементов и взаимодействий (связей) между ними. Таким образом, когда мы говорим о влиянии компонента на другой компонент, мы имеем в виду его влияние на каждый элемент другого компонента. Но могут существовать элементы, на которые влияющий компонент не оказывает прямого влияния, при этом они будут иметь нулевые векторы приоритетов. Умножение приоритета такого элемента на приоритет компонента не обеспечивает для этого элемента стохастического столбца в суперматрице (когда сумма элементов столбца равна единице). В таких случаях, из-за наличия особых элементов, не подверженных влиянию, необходимо повторно нормализовать соответствующие столбцы, чтобы матрица стала стохастической.

Определяя элементы проблемы и описывая их отношения с помощью сетевой структуры, мы можем объединить различные аспекты рассматриваемой задачи. МАС является полезным инструментом для этой цели.

4-3. Иерархия — частный случай сети. Пример выбора школы

Рапссмотрим классический пример выбора школы с применением МАИ. На рис. 4-1 приведена иерархия для этого примера, а ниже показана суперматрица, соответствующая иерархической модели. В задаче рассматриваются три средних школы: *A*, *B* и *C*, которые анализируются по предпочтительности с точки зрения сына автора книги. В процессе сравнения используются шесть независимых критериев (характеристик): *Образование*, *Друзья*, *Школьная жизнь*, *Профессиональные навыки*, *Подготовка к поступлению в колледж* и *Музыкальное образование*. Главную цель в иерархии можно сформулировать как *Удовлетворение школой*. На основе парных сравнений критериев и альтернатив были получены векторы приоритетов, которые записаны в соответствующих позициях суперматрицы, приведенной в табл. 4-1. Заметим, что в суперматрицу была добавлена единичная матрица-блок, характеризующая влияние альтернатив на самих себя. При возведении суперматрицы в квадрат мы получаем для данного примера (и для любых трехуровневых иерархий) предельную суперматрицу

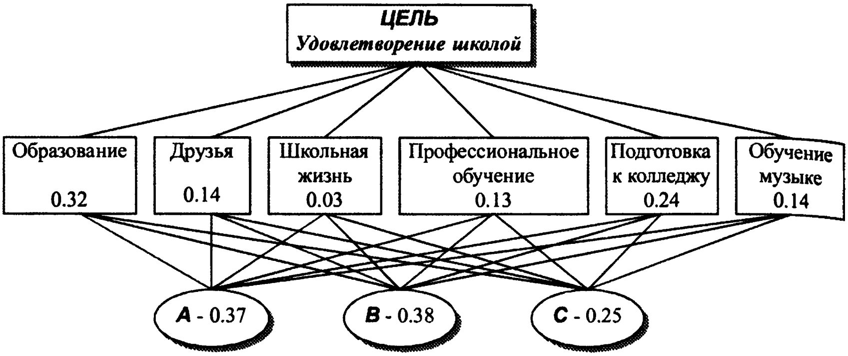


Рис. 4-1. Иерархическая модель для примера о выборе школы

Таблица 4-1

Исходная (не взвешенная) и предельная суперматрицы для примера о выборе школы

Исходная суперматрица											
Компонент		**1 Цель**	**2 Критерии**						**3 Альтернативы**		
	Узел	**Цель**	**1 Образование**	**2 Друзья**	**3 Школьная жизнь**	**4 Проф. обучение**	**5 Подготовка к колледжу**	**6 Обучение музыке**	**A**	**B**	**C**
Цель	**Цель**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
Критерии	**1 Образование**	0.321	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
	2 Друзья	0.140	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
	3 Школьная жизнь	0.035	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
	4 Проф. обучение	0.128	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
	5 Подготовка к колледжу	0.237	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
	6 Обучение музыке	0.139	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
Альтернативы	**A**	0.000	0.157	0.333	0.455	0.772	0.250	0.691	1.00	0.00	0.00
	B	0.000	0.594	0.333	0.091	0.055	0.500	0.091	0.00	1.00	0.00
	C	0.000	0.249	0.333	0.455	0.173	0.250	0.218	0.00	0.00	1.00

Окончание таблицы 4-1

Предельная суперматрица												
Компонент		**1 Цель**	**2 Критерии**						**3 Альтернативы**		
	Узел	**Цель**	**1 Образование**	**2 Друзья**	**3 Школьная жизнь**	**4 Проф. обучение**	**5 Подготовка к колледжу**	**6 Обучение музыке**	**A**	***B***	***C***
Цель	**Цель**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
Критерии	**1 Образование**	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
	2 Друзья	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
	3 Школьная жизнь	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
	4 Проф. обучение	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
	5 Подготовка к колледжу	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
	6 Обучение музыке	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00	0.00
Альтернативы	**A**	0.367	0.157	0.333	0.455	0.772	0.250	0.691	1.00	0.00	0.00
	B	0.378	0.594	0.333	0.091	0.055	0.500	0.091	0.00	1.00	0.00
	C	0.254	0.249	0.333	0.455	0.173	0.250	0.218	0.00	0.00	1.00

(см. главу 3). Результирующие приоритеты альтернатив записаны в трех нижних позициях первого столбца. Значения этих приоритетов совпадают с результатом иерархической композиции МАИ [1].

В табл. 4-1 исходная и предельная суперматрицы импортированы из программы *Super Decisions*.

4-4. Два примера: простой цикл и холархия (с непримитивными матрицами)

Сначала рассмотрим пример о покупке автомобиля, который иллюстрирует самый простой случай обратной связи в задаче принятия решений.

Пример А. Задача о покупке автомобиля.

Предположим, что покупатель должен сделать выбор из трех типов малогабаритных автомобилей: *A* (Американский), *E* (Европейский), *J* (Японский), руководствуясь следующими тремя критериями: ***C*** — *Стоимость*, ***R*** — *Затраты на ремонт* и ***D*** — *Долговечность*. Структура задачи представлена на рис. 4-2.

На первом этапе типы автомобилей попарно сравнивались по каждому критерию в трех отдельных матрицах. Затем были проведены парные сравнения критериев для каждого типа автомобилей. При этом задавались вопросы: какой из двух типов автомобилей в большей степени удовлетворяет критерию? какой из двух критериев является более характерным для данного типа автомобилей? Все шесть матриц приведены ниже.

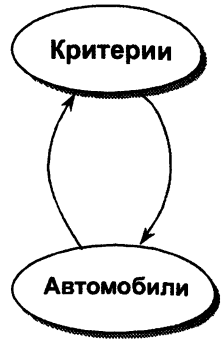


Рис. 4-2. Структура задачи о покупке автомобиля с внешней зависимостью

Для первого набора из трех матриц ЛПР отвечал на вопрос: какой из двух автомобилей является более предпочтительным по заданному критерию и насколько более предпочтительным?

Стоимость *C*	***A***	***E***	***J***	**Собственный вектор**
A	1	5	3	0.637
E	1/5	1	1/3	0.105
J	1/3	3	1	0.258

Отношение согласованности $CR = 0.033$

Затраты на ремонт *R*	***A***	***E***	***J***	**Собственный вектор**
A	1	5	2	0.582
E	1/5	1	1/3	0.109
J	1/2	3	1	0.003

$CR = 0.003$

Долговечность *D*	***A***	***E***	***J***	**Собственный вектор**
A	1	1/5	1/3	0.105
E	5	1	3	0.637
J	3	1/3	1	0.258

$CR = 0.033$

При заполнении второго набора матриц ЛПР отвечал на вопрос: какой из двух критериев является более характерным для данного типа автомобилей и насколько более характерным?

A **Американский**	***C***	***R***	***D***	**Собственный вектор**
C	1	3	4	0.634
R	1/3	1	1	0.192
D	1/4	1	1	0.174

$CR = 0.008$

E **Европейский**	***C***	***R***	***D***	**Собственный вектор**
C	1	1	1/2	0.250
R	1	1	1/2	0.250
D	2	2	1	0.500

$CR = 0.008$

J **Японский**	***C***	***R***	***D***	**Собственный вектор**
C	1	2	1	0.400
R	1/2	1	1/2	0.200
D	1	2	1	0.400

$CR = 0.000$

Полученные собственные векторы для этих шести матриц были записаны в столбцы следующей суперматрицы:

$$
\begin{array}{c} \\ C \\ R \\ D \\ A \\ E \\ J \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} C & R & D & A & E & J \end{array} \\
\left\| \begin{array}{cccccc}
0 & 0 & 0 & 0.634 & 0.250 & 0.400 \\
0 & 0 & 0 & 0.192 & 0.250 & 0.200 \\
0 & 0 & 0 & 0.174 & 0.500 & 0.400 \\
0.637 & 0.582 & 0.105 & 0 & 0 & 0 \\
0.105 & 0.109 & 0.637 & 0 & 0 & 0 \\
0.259 & 0.309 & 0.258 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right\|
\end{array} .
$$

Для дальнейшей обработки суперматрицу необходимо привести к стохастическому виду. В данном случае суммы элементов каждого столбца равны единице, т. е. матрица является стохастической. Результирующие приоритеты элементов суперматрицы получаются путем возведения данной стохастической матрицы в предельные степени. Данная суперматрица при возведении в целочисленные степени дает две стабильные формы, которые имеют следующий вид:

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & C & R & D & A & E & J \\
C & 0 & 0 & 0 & 0.464 & 0.464 & 0.464 \\
R & 0 & 0 & 0 & 0.210 & 0.210 & 0.210 \\
D & 0 & 0 & 0 & 0.326 & 0.326 & 0.326 \\
A & 0.452 & 0.452 & 0.452 & 0 & 0 & 0 \\
E & 0.279 & 0.279 & 0.279 & 0 & 0 & 0 \\
J & 0.269 & 0.269 & 0.269 & 0 & 0 & 0
\end{array};$$

$$\begin{array}{c|cccccc|}
 & C & R & D & A & E & J \\
C & 0.464 & 0.464 & 0.464 & 0 & 0 & 0 \\
R & 0.210 & 0.210 & 0.210 & 0 & 0 & 0 \\
D & 0.326 & 0.326 & 0.326 & 0 & 0 & 0 \\
A & 0 & 0 & 0 & 0.452 & 0.452 & 0.452 \\
E & 0 & 0 & 0 & 0.279 & 0.279 & 0.279 \\
J & 0 & 0 & 0 & 0.269 & 0.269 & 0.269
\end{array}.$$

Окончательный результат был вычислен как среднее значение этих двух предельных матриц.

Таким образом, при заданных суждениях наиболее предпочтительным является американский малогабаритный автомобиль, что обусловлено, главным образом, его низкой стоимостью, даже притом, что он уступает остальным типам по затратам на ремонта и долговечности.

Рассмотрим, что произойдет при добавлении к структуре, показанной на рис. 4-2, двух циклов независимости. В результате будем иметь структуру, показанную на рис. 4-3. Цикл независимости соответствует ситуации, когда каждый элемент компонента зависит от самого себя. При этом блок, характеризующий данный компонент и расположенный на главной диагонали суперматрицы, представляет собой единичную матрицу.

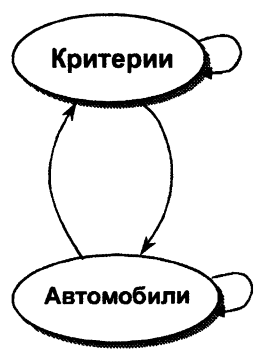


Рис. 4-3. Структура задачи о покупке автомобиля с зависимостью элементов от самих себя

Исходная (не взвешенная) суперматрица задачи имеет вид:

$$W_0 = \begin{array}{c|cccccc|} & C & R & D & A & E & J \\ C & 1 & 0 & 0 & 0.634 & 0.250 & 0.400 \\ R & 0 & 1 & 0 & 0.192 & 0.250 & 0.200 \\ D & 0 & 0 & 1 & 0.174 & 0.500 & 0.400 \\ A & 0.637 & 0.582 & 0.105 & 1 & 0 & 0 \\ E & 0.105 & 0.109 & 0.637 & 0 & 1 & 0 \\ J & 0.259 & 0.309 & 0.258 & 0 & 0 & 1 \end{array}.$$

Из-за добавления единичных блоков, представляющих зависимости элементов от самих себя, суммы столбцов суперматрицы становятся больше единицы. Однако условие стохастичности столбцов суперматрицы гарантирует сходимость и не должно нарушаться. Поэтому необходимо определить нормированные весовые коэффициенты компонентов и умножить на них соответствующие блоки суперматрицы. В рассматриваемом примере примем равными веса компонентов (0.5), тогда значения диагональных элементов, соответствующих циклам, будут равны 0.5. Предельные приоритеты изменились по сравнению с предыдущим случаем, став вдвое меньше, но их соотношение осталось прежним. Приведенная ниже взвешенная суперматрица является стохастической и примитивной, поэтому при ее возведении в степени не возникает циклов.

$$W = \begin{array}{c|cccccc|} & C & R & D & A & E & J \\ C & 0.5 & 0 & 0 & 0.317 & 0.125 & 0.200 \\ R & 0 & 0.5 & 0 & 0.096 & 0.125 & 0.100 \\ D & 0 & 0 & 0.5 & 0.087 & 0.250 & 0.200 \\ A & 0.319 & 0.291 & 0.053 & 0.5 & 0 & 0 \\ E & 0.053 & 0.055 & 0.319 & 0 & 0.5 & 0 \\ J & 0.129 & 0.155 & 0.129 & 0 & 0 & 0.5 \end{array};$$

$$W^{\infty} = \begin{array}{c|cccccc|} & C & R & D & A & E & J \\ C & 0.232 & 0.232 & 0.232 & 0.232 & 0.232 & 0.232 \\ R & 0.105 & 0.105 & 0.105 & 0.105 & 0.105 & 0.105 \\ D & 0.163 & 0.163 & 0.163 & 0.163 & 0.163 & 0.163 \\ A & 0.226 & 0.226 & 0.226 & 0.226 & 0.226 & 0.226 \\ E & 0.140 & 0.140 & 0.140 & 0.140 & 0.140 & 0.140 \\ J & 0.134 & 0.134 & 0.134 & 0.134 & 0.134 & 0.134 \end{array}.$$

Предельная суперматрица имеет идентичные столбцы, причем три первых элемента каждого столбца показывают приоритеты критериев, а три последних — приоритеты альтернатив.

Теперь посмотрим, к чему приводит добавление циклов взаимной внутренней зависимости элементов в компоненте. Предположим, что в рассматриваемой задаче существует взаимная зависимость критериев друг от друга, тогда ее структура будет представлена графом, показанным на рис. 4-4. В этом случае мы должны провести парные сравнения критериев по каждому из них, руководствуясь главной целью задачи (выбрать наиболее приемлемый автомобиль).

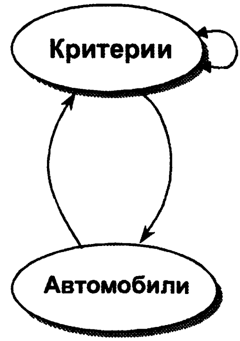


Рис. 4-4. Структура задачи о покупке автомобиля с взаимной зависимостью критериев

Векторы приоритетов, характеризующие зависимость критериев друг от друга, записаны на пересечении трех первых строк с тремя первыми столбцами приведенной ниже суперматрицы, которая соответствует новой постановке задачи. При этом блоки суперматрицы были умножены на весовые коэффициенты компонентов (0.5) с целью приведения матрицы к стохастическому виду.

$$
W = \begin{array}{c} \\ C \\ R \\ D \\ A \\ E \\ J \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C & R & D & A & E & J \end{array} \\
\left\| \begin{array}{cccccc}
0.150 & 0.100 & 0.300 & 0.634 & 0.250 & 0.400 \\
0.200 & 0.125 & 0.150 & 0.192 & 0.250 & 0.200 \\
0.150 & 0.275 & 0.050 & 0.174 & 0.500 & 0.400 \\
0.319 & 0.291 & 0.053 & 0 & 0 & 0 \\
0.053 & 0.055 & 0.319 & 0 & 0 & 0 \\
0.129 & 0.155 & 0.129 & 0 & 0 & 0
\end{array} \right\| \end{array}.
$$

При возведении этой взвешенной суперматрицы в степени получим предельную суперматрицу:

$$
W^{\infty} = \begin{array}{c} \\ C \\ R \\ D \\ A \\ E \\ J \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} C & R & D & A & E & J \end{array} \\
\left\| \begin{array}{cccccc}
0.278 & 0.278 & 0.278 & 0.278 & 0.278 & 0.278 \\
0.179 & 0.179 & 0.179 & 0.179 & 0.179 & 0.179 \\
0.210 & 0.210 & 0.210 & 0.210 & 0.210 & 0.210 \\
0.152 & 0.152 & 0.152 & 0.152 & 0.152 & 0.152 \\
0.091 & 0.091 & 0.091 & 0.091 & 0.091 & 0.091 \\
0.091 & 0.091 & 0.091 & 0.091 & 0.091 & 0.091
\end{array} \right\| \end{array}.
$$

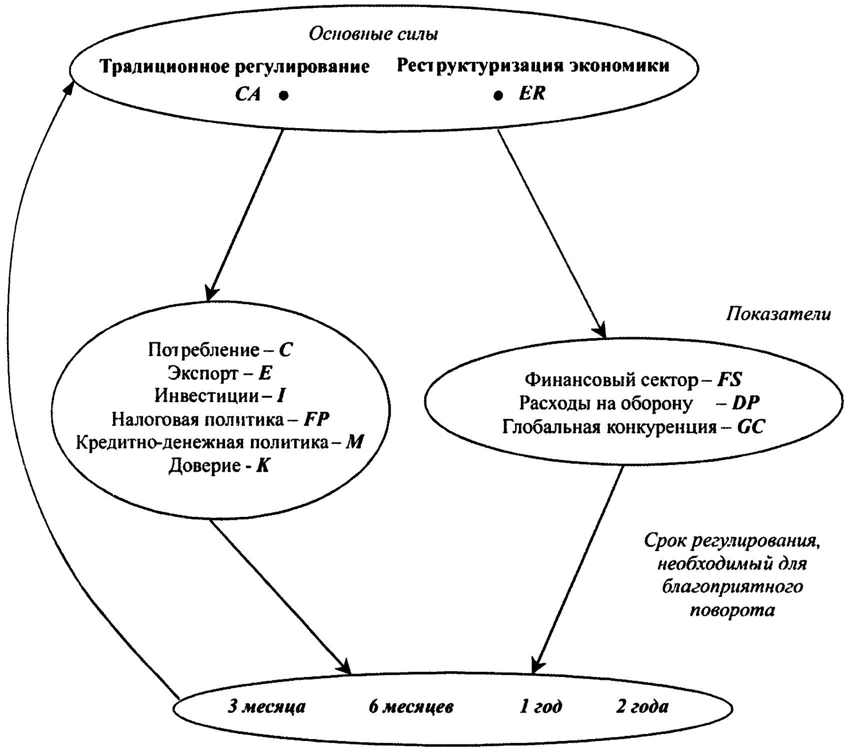


Рис. 4-5. Холархия факторов для задачи прогнозирования даты положительных изменений в экономике

Как и следовало ожидать, при наличии зависимостей между критериями соотношения предельных приоритетов критериев и альтернатив изменяются по сравнению с вычисленными ранее. Американский автомобиль по-прежнему остается лучшим, но этот факт не следует трактовать как закономерность.

Пример Б. Прогнозирование даты наступления благоприятных изменений в экономике США

Цель этого исследования, проведенного в конце 1992 года совместно с А. Блэйером и Р. Нахтманом [2], заключалась в том, чтобы предсказать наиболее вероятную дату положительных сдвигов в американской экономике. Структура задачи показана на рис. 4-5. На верхнем уровне приведенной иерархии присутствуют факторы, представляющие главные силы, которые влияют на состояние экономики. Эти силы сгруппированы в две категории: «традиционное регулирование» и «реструктуризация экономики». Каждая из категорий описана рядом показателей, размещенных на втором уровне иерархии. Третий уровень, отражающий специфику прогнозирования, содержит горизонты (периоды) времени, в течение которых могут произойти положительные изменения.

Поскольку оба фактора — традиционное регулирование и реструктуризация — зависят от времени, то их относительная важность должна быть установлена для каждого из четырех рассматриваемых периодов прогнозирования. Таким образом, вместо единственной цели, которая обычно присутствует на верхнем уровне иерархии, для сравнения двух главных факторов мы будем использовать альтернативные временные сроки, расположенные на самом нижнем уровне. Следовательно, мы получим иерархию с обратной связью, называемую холархией, в которой приоритеты элементов самого верхнего уровня определяются относительно элементов самого нижнего уровня, вследствие чего образуется цикл.

Для оценки интенсивности положительных изменений в экономике мы будем использовать стандартную форму иерархии, на вершине которой расположены основные силы (традиционное регулирование и реструктуризация экономики).

Методы традиционного регулирования предполагают неизменность системы причинно-следственных связей в экономике. Это предположение основано на том, что базовая структура экономики остается постоянной. При этом прогноз с приемлемой точностью можно получить, отслеживая изменения выходных параметров существующей сетевой модели «стимул — реакция», вызванные возмущениями базовых экономических параметров. По нашим представлениям, традиционное регулирование можно формально описать шестью макроэкономическими показателями, расположенными на втором уровне холархии: *уровень потребления* (***C***), *состояние экспорта* (***E***), *уровень инвестиций* (***I***), *налоговая политика* (***FP***), *кредитно-денежная политика* (***M***), *уровень доверия населения* (***K***). Мы признаем, что эти показатели являются в некотором смысле взаимозависимыми.

Например, снижение процентной ставки Федеральным резервным банком должно стимулировать восстановление равновесия портфелей активов во всей экономике. В свою очередь, это должно снизить стоимость капитала фирм и стимулировать рост инвестиций. Одновременно должны уменьшиться финансовые затраты фермеров и увеличиться их свободные доходы. Увеличение свободных доходов стимулирует потребление, что в конечном итоге положительно влияет на занятость населения и рост валового национального продукта (ВНП). Однако все вышесказанное справедливо, если экономические связи не нарушены и хорошо осмыслены.

Последние события в мировой экономике (1992 год) приведут к серьезным изменениям направлений развития экономики США в течение нескольких ближайших лет и, кроме того, вызовут необходимость ее реструктуризации. Война в Персидском заливе, разрушение плановой экономики в странах Восточной Европы и в бывшем СССР, объединение Западной Европы, появление новых индустриальных держав и ускорение глобальной интеграции финансового сектора — все эти события свидетельствуют о драматических изменениях в экономических структурах. Благоразумное признание этих фактов подсказывает, что терпение и тщательный анализ событий являются наиболее адекватными принципами общественной политики.

Что касается характера текущей реструктуризации экономики, то в данном примере в качестве основных показателей мы выделили преобразование финансового сектора (***FS***), уменьшение военных расходов (***DP***) и изменение позиций американской экономики в глобальной конкуренции (***GC***).

На первый взгляд, влияние перечисленных факторов и показателей на состояние американской экономической системы может оказаться сложным и не до конца понятным. Чтобы разобраться в ситуации, мы будем суммировать эти влияния, оценивая воздействие каждого показателя на ожидаемый срок наступления благоприятного поворота, также как и их воздействие на относительную интенсивность грядущего роста.

В качестве альтернатив рассматривались четыре возможных срока. Они расположены на третьем уровне иерархии и являются вполне разумными отрезками времени, с одной стороны, достаточно длительными для того, чтобы уловить различия в процессе сравнений, и с другой — достаточно короткими для того, чтобы рассмотреть все возможные изменения в течение двухлетнего срока прогнозирования. Мы анализируем следующие 4 периода: *3 месяца*, *6 месяцев*, *1 год*, и *2 года или больше*, которые отсчитываются с начала 1992 года.

Для оценки интенсивности экономического подъема, которая проводилась в мае 1992 года, в данном примере использовались следующие диапазоны усредненного реального роста ВНП: очень сильный (5.5–6.5 %), сильный (4.5–5.5 %), умеренный (3.0–4.5 %), и слабый (2.0–3.0 %). Эти диапазоны представляют годовое изменение процента увеличения реального ВНП в течение первых двух лет оживления экономики. Несмотря на произвольный выбор диапазонов, эти значения согласуются с данными наблюдений за периодами экономических подъемов, которые имели место после Второй мировой войны.

Результаты выбора возможных решений зависят от качества экспертных суждений. Первая задача, связанная с определением наиболее вероятной даты благоприятного поворота в экономике США, была решена в конце декабря 1991 года, а ее результаты последовательно уточнялись вплоть до мая 1992 года.

В табл. 4-2–4-5 приведены матрицы парных сравнений и полученные из них суперматрицы.

Таблица 4-2

Матрицы парных сравнений показателей относительно главных факторов

Группа А: Какой из показателей традиционного регулирования имеет больший потенциал влияния и насколько больший?

Традиционное регулирование		*C*	E	*I*	*K*	*FP*	*M*	***Вектор приоритетов***
Уровень потребления	*C*	1	7	5	1/5	1/2	1/5	0.118
Экспорт	*E*	1/7	1	1/5	1/5	1/5	1/7	0.029
Инвестиции	*I*	1/5	5	1	1/5	1/3	1/5	0.058
Уровень доверия	*K*	5	5	5	1	5	1	0.334
Налоговая политика	*FP*	2	5	3	1/5	1	1/5	0.118
Кредитно-денежная политика	*M*	5	7	5	1	5	1	0.343

Группа В: Какой из показателей реструктуризации экономики имеет больший потенциал влияния и насколько больший?

Реструктуризация экономики		*FS*	*DP*	*GC*	***Вектор приоритетов***
Финансовый сектор	*FS*	1	3	3	0.584
Расходы на оборону	*DP*	1/3	1	3	0.281
Глобальная конкуренция	*GC*	1/3	1/3	1	0.135

Таблица 4-3

Матрицы относительной вероятности сроков, в течение которых могут произойти положительные сдвиги для показателей традиционного регулирования

В процессе сравнений задавался вопрос: какой срок является наиболее вероятным для появления положительных изменений, если соответствующий показатель рассматривается как единственная движущая сила?

1. Выявление относительной вероятности сроков при условии, что на благоприятные изменения влияет только уровень потребления *C*

C	3	6	12	24	**Приоритеты**
3 месяца	1	1/5	1/7	1/7	0.043
6 месяцев	5	1	1/5	1/5	0.113
12 месяцев	7	5	1	1/3	0.310
24 месяца	7	5	3	1	0.534

2. Относительная важность сроков при условии, что положительные изменения связаны только с уровнем экспорта *E*

E	3	6	12	24	**Приоритеты**
3 месяца	1	1	1/5	1/5	0.083
6 месяцев	1	1	1/5	1/5	0.083
12 месяцев	5	5	1	1	0.417
24 месяца	5	5	1	1	0.417

Окончание таблицы 4-3

3. Относительная важность сроков при условии, что положительные изменения связаны только с состоянием инвестиций *I*

I	3	6	12	24	Приоритеты
3 месяца	1	1	1/5	1/5	0.078
6 месяцев	1	1	1/5	1/5	0.078
12 месяцев	5	5	1	1/3	0.305
24 месяца	5	5	3	1	0.538

4. Относительная важность сроков при условии, что положительные изменения связаны только с налоговой политикой *FP*

FP	3	6	12	24	Приоритеты
3 месяца	1	1	1/3	1/5	0.099
6 месяцев	1	1	1/5	1/5	0.087
12 месяцев	3	5	1	1	0.382
24 месяца	5	5	1	1	0.432

5. Относительная важность сроков при условии, что положительные изменения связаны только с кредитно-денежной политикой *M*

M	3	6	12	24	Приоритеты
3 месяца	1	5	7	7	0.605
6 месяцев	1/5	1	5	7	0.262
12 месяцев	1/7	1/5	1	1/5	0.042
24 месяца	1/7	1/7	5	1	0.091

6. Ожидаемые сроки, в течение которых уровень доверия станет таким, что потребители и инвесторы поддержат положительные изменения в экономике *K*

K	3	6	12	24	Приоритеты
3 месяца	1	3	5	5	0.517
6 месяцев	1/3	1	5	5	0.305
12 месяцев	1/5	1/5	1	5	0.124
24 месяца	1/5	1/5	1/5	1	0.054

Таблица 4-4

Матрицы относительной вероятности сроков, в течение которых могут произойти положительные сдвиги, для показателей реструктуризации экономики

В процессе сравнений задавался вопрос: какой срок является наиболее вероятным для появления положительных изменений, если соответствующий показатель рассматривается как единственная движущая сила?

1. Наиболее вероятный срок реструктуризации финансовой системы, обеспечивающий экономический подъем *FS*

FS	3	6	12	24	Приоритеты
3 месяца	1	1/3	1/5	1/7	0.049
6 месяцев	3	1	1/5	1/7	0.085
12 месяцев	5	5	1	1/5	0.236
24 месяца	7	7	5	1	0.630

2. Наиболее вероятный срок реструктуризации оборонных расходов, обеспечивающий экономический подъем *DP*

DP	3	6	12	24	Приоритеты
3 месяца	1	1/3	1/5	1/7	0.049
6 месяцев	3	1	1/5	1/7	0.085
12 месяцев	5	5	1	1/5	0.236
24 месяца	7	7	5	1	0.630

Окончание таблицы 4-4

3. Наиболее вероятный срок, требующийся для управления глобальной конкуренцией с целью достижения экономического подъема *GC*

GC	3	6	12	24	Приоритеты
3 месяца	1	1	1/3	1/5	0.089
6 месяцев	1	1	1/3	1/5	0.089
12 месяцев	3	3	1	1/5	0.208
24 месяца	5	5	5	1	0.613

Таблица 4-5

Выявление наиболее вероятных факторов, которые будут доминировать в течении заданного срока

В процессе сравнений задавался вопрос: какой фактор будет в большей степени влиять на подъем экономики в течение рассматриваемого периода?
CA — традиционные методы регулирования; *ER* — методы реструктуризации экономики.

3 месяца

3 месяца	*CA*	*ER*	Приоритеты
CA	1	5	0.833
ER	1/5	1	0.167

6 месяцев

6 месяцев	*CA*	*ER*	Приоритеты
CA	1	5	0.833
ER	1/5	1	0.167

12 месяцев (1 год)

12 месяцев	*CA*	*ER*	Приоритеты
CA	1	1	0.5
ER	1	1	0.5

24 месяца (2 года)

24 месяца	*CA*	*ER*	
CA	1	1/5	0.167
ER	5	1	0.833

Теперь все полученные векторы приоритетов запишем в соответствующие столбцы суперматрицы. Например, первый вектор, вычисленный для матрицы показателей традиционного регулирования, поместим в первый столбец рядом с этими показателями. Суперматрица, будучи стохастической (суммы столбцов равны единице), затем возводится в предельные степени. При этом выявляются все взаимодействия между элементами и получается предельный результат, приведенный в табл. 4-6, в которой все столбцы в пределах каждого блока одинаковы. Особый интерес представляют два идентичных столбца в левом нижнем углу матрицы (табл. 4-7 а).

Таблица 4-6

Начальная форма суперматрицы W

		CA	*ER*	*C*	*E*	*I*	*K*	*FP*	*M*	*FS*	*DP*	*GC*	*3 мес.*	*6 мес.*	*1 год*	*≥ 2 года*
CA	**Традиционное регулирование**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.833	0.833	0.500	0.167
ER	**Реструктуризация экономики**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.167	0.167	0.500	0.833
C	**Уровень потребления**	0.118	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
E	**Экспорт**	0.029	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
I	**Инвестиции**	0.058	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
K	**Уровень доверия**	0.334	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FP	**Налоговая политика**	0.118	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
M	**Кредитно-денежная политика**	0.343	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
FS	**Финансовый сектор**	0.0	0.584	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
DP	**Расходы на оборону**	0.0	0.281	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
GC	**Глобальная конкуренция**	0.0	0.135	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3 мес.		0.0	0.0	0.043	0.083	0.078	0.517	0.099	0.605	0.049	0.049	0.089	0.0	0.0	0.0	0.0
6 мес.		0.0	0.0	0.113	0.083	0.078	0.305	0.086	0.262	0.085	0.085	0.089	0.0	0.0	0.0	0.0
1 год		0.0	0.0	0.310	0.417	0.305	0.124	0.383	0.042	0.236	0.236	0.209	0.0	0.0	0.0	0.0
≥ 2 года		0.0	0.0	0.534	0.417	0.539	0.054	0.432	0.091	0.630	0.630	0.613	0.0	0.0	0.0	0.0

Таблица 4-7а

Первая предельная форма суперматрицы W^{∞}

	CA	*ER*	*C*	*E*	*I*	*K*	*FP*	*M*	*FS*	*DP*	*GC*	*3 мес.*	*6 мес.*	*1 год*	*≥2 года*
***CA* Традиционное регулирование**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.484	0.484	0.484	0.484
***ER* Реструктуризация экономики**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.516	0.516	0.516	0.516
***C* Уровень потребления**	0.057	0.057	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
***E* Экспорт**	0.014	0.014	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
***I* Инвестиции**	0.028	0.028	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
***K* Уровень доверия**	0.162	0.162	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
***FP* Налоговая политика**	0.057	0.057	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
***M* Кредитно-денежная политика**	0.166	0.166	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
***FS* Финансовый сектор**	0.302	0.302	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
***DP* Расходы на оборону**	0.145	0.145	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
***GC* Глобальная конкуренция**	0.070	0.070	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
3 мес.	0.0	0.0	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.0	0.0	0.0	0.0
6 мес.	0.0	0.0	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.0	0.0	0.0	0.0
1 год	0.0	0.0	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.0	0.0	0.0	0.0
≥2 года	0.0	0.0	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.0	0.0	0.0	0.0

Таблица 4-7b

Вторая предельная форма суперматрицы W^{∞}

	CA	*ER*	*C*	*E*	*I*	*K*	*FP*	*M*	*FS*	*DP*	*GC*	*3 мес.*	*6 мес.*	*1 год*	*≥2 года*
CA **Традиционное регулирование**	0.0	0.0	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.0	0.0	0.0	0.0
ER **Реструктуризация экономики**	0.0	0.0	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.0	0.0	0.0	0.0
C **Уровень потребления**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.057	0.057	0.057	0.057
E **Экспорт**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.014	0.014	0.014	0.014
I **Инвестиции**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.028	0.028	0.028	0.028
K **Уровень доверия**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.162	0.162	0.162	0.162
FP **Налоговая политика**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.057	0.057	0.057	0.057
M **Кредитно-денежная политика**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.166	0.166	0.166	0.166
FS **Финансовый сектор**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.301	0.301	0.301	0.301
DP **Расходы на оборону**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.145	0.145	0.145	0.145
GC **Глобальная конкуренция**	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.070	0.070	0.070	0.070
3 мес.	0.224	0.224	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
6 мес.	0.151	0.151	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
1 год	0.201	0.201	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
≥2 года	0.424	0.424	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Таблица 4-7c

Третья предельная форма суперматрицы W^{∞}

		CA	*ER*	*C*	*E*	*I*	*K*	*FP*	*M*	*FS*	*DP*	*GC*	*3 мес.*	*6 мес.*	*1 год*	*≥2 года*
CA	**Традиционное регулирование**	0.484	0.484	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
ER	**Реструктуризация экономики**	0.516	0.516	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
C	**Уровень потребления**	0.0	0.0	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.0	0.0	0.0	0.0
E	**Экспорт**	0.0	0.0	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.0	0.0	0.0	0.0
I	**Инвестиции**	0.0	0.0	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.0	0.0	0.0	0.0
K	**Уровень доверия**	0.0	0.0	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.0	0.0	0.0	0.0
FP	**Налоговая политика**	0.0	0.0	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.0	0.0	0.0	0.0
M	**Кредитно-денежная политика**	0.0	0.0	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.0	0.0	0.0	0.0
FS	**Финансовый сектор**	0.0	0.0	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.0	0.0	0.0	0.0
DP	**Расходы на оборону**	0.0	0.0	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.0	0.0	0.0	0.0
GC	**Глобальная конкуренция**	0.0	0.0	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.0	0.0	0.0	0.0
3 мес.		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.223	0.223	0.223	0.223
6 мес.		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.152	0.152	0.152	0.152
1 год		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.201	0.201	0.201	0.201
≥2 года		0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.424	0.424	0.424	0.424

Таблица 4-8

Сумма предельных форм суперматрицы

		CA	*ER*	*C*	*E*	*I*	*K*	*FP*	*M*	*FS*	*DP*	*GC*	*3 мес.*	*6 мес.*	*1 год*	*≥2 года*
CA	**Традиционное регулирование**	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484	0.484
ER	**Реструктуризация экономики**	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516	0.516
C	**Уровень потребления**	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057
E	**Экспорт**	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014	0.014
I	**Инвестиции**	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028	0.028
K	**Уровень доверия**	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162	0.162
FP	**Налоговая политика**	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057	0.057
M	**Кредитно-денежная политика**	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166	0.166
FS	**Финансовый сектор**	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302	0.302
DP	**Расходы на оборону**	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145	0.145
GC	**Глобальная конкуренция**	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070	0.070
3 мес.		0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223	0.223
6 мес.		0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152	0.152
1 год		0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201	0.201
≥2 года		0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424	0.424

Таблица 4-9

Усредненная предельная форма суперматрицы

	CA	*ER*	*C*	*E*	*I*	*K*	*FP*	*M*	*FS*	*DP*	*GC*	*3 мес.*	*6 мес.*	*1 год*	*≥2 года*
CA **Традиционное регулирование**	0.161	0.161	0.161	0.161	0.161	0.161	0.161	0.161	0.161	0.161	0.161	0.161	0.161	0.161	0.161
ER **Реструктуризация экономики**	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172	0.172
C **Уровень потребления**	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019
E **Экспорт**	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005	0.005
I **Инвестиции**	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009	0.009
K **Уровень доверия**	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054	0.054
FP **Налоговая политика**	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019	0.019
M **Кредитно-денежная политика**	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055	0.055
FS **Финансовый сектор**	0.101	0.101	0.101	0.101	0.101	0.101	0.101	0.101	0.101	0.101	0.101	0.101	0.101	0.101	0.101
DP **Расходы на оборону**	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048	0.048
GC **Глобальная конкуренция**	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023	0.023
3 мес.	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075	0.075
6 мес.	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051	0.051
1 год	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067	0.067
≥2 года	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141

Иерархический синтез с применением программного обеспечения МАИ, разработанного фирмой *Expert Choice*, дал следующие результаты: ощутимые благоприятные сдвиги в экономике, вероятно, потребуют около года, т. е. их можно ожидать в четвертом квартале 1992 года. Этот прогноз был получен на основании значений в четырех нижних ячейках первого столбца предельной суперматрицы (табл. 4-9), которые были нормированы на единицу, а затем каждое из этих значений было умножено на среднее значение соответствующего срока для получения несмещенной оценки: $0.223 \times 1.5 + 0.152 \times 4.5 + 0.201 \times 9 + 0.424 \times 18 =$ $= 10.46$ (месяцев).

Для полноты представления мы приводим предельные формы суперматрицы (табл. 4-7 a, 4-7 b, 4-7 c) для всех трех стадий холархии, суперматрица которой при возведении в степени дает цикл, имеющий длину $c = 3$. В табл. 4-8 представлена сумма предельных форм, а в табл. 4-9 — чезаровская сумма (средние значения предельных форм).

4-5. Единственный управляющий критерий: экономические выгоды ресторанов быстрого питания (неприводимая примитивная матрица)

Миллиарды долларов тратятся каждый год на привлечение внимания потребителей к различным товарам, услугам, компаниям или идеям. Вид деятельности, который называют рекламой, часто решает судьбу фирмы. Макдоналдс, Бургер Кинг и Вендис (McDonald's, Burger King, Wendy's), например, тратят основную часть своих ресурсов на привлечение клиентов. Эти три компании являются прямыми конкурентами, рекламная деятельность каждой фирмы оказывает влияние на остальных. Реклама косвенных конкурентов, в частности Пицца Хат (Pizza Hut), также влияет на распределение долей рынка. Например, хорошо известно интенсивное взаимодействие рекламной деятельности компаний Кока-кола и Пепси-кола. Каждая из них представляет новые продукты типа Кока-классик или Клеар-пепси и применяет множество тактических приемов с целью увеличения своей доли рынка. Тем не менее, действия одной фирмы прямо и косвенно влияют на деятельность других участников рынка. В свою очередь, реакции других фирм имеют прямое и косвенное влияние на первую фирму. На этот бесконечный процесс воздействует множество акторов (прямых и косвенных участников процесса принятия решения) и множество факторов (внутренних и внешних).

Рассмотрим известные компании Макдоналдс, Бургер Кинг, Вендис, а также другие американские сети ресторанов быстрого питания. Рыночные

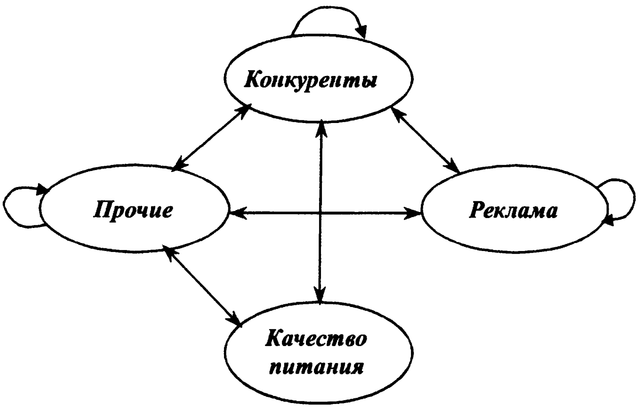


Рис. 4-6. Структура задачи о ресторанах быстрого питания

перспективы этих компаний можно оценить с помощью таких факторов, как реклама, качество продуктов и факторы здоровья. Попытаемся построить модель развития индустрии быстрого питания (рис. 4-6), которая позволит оценить существующее распределение долей рынка между компаниями Макдоналдс, Бургер Кинг и Вендис (на февраль 1994 года), а также определить их среднесрочные перспективы. Наша цель заключается в принятии решения о вложении капитала в эти компании пропорционально их приоритетам.

Несмотря на застой в экономике, американцы тратят все большее количество долларов на готовые пищевые продукты. Эта тенденция отражает увеличение занятости женщин в общественной сфере, что приводит к уменьшению времени, отводимого на домашнее приготовление пищи, и к увеличению доходов семей. При этом возрастает количество ресторанов, которые предлагают еду на вынос и обслуживание с доставкой. Компоненты сети решений, показанной на рис. 4-6, представляют четыре главных фактора, воздействующих на распределение долей рынка в индустрии быстрого питания.

Самым важным в этой задаче является компонент ***Реклама***, который состоит из трех элементов: *Творчество*, *Поощрения* и *Частота*. Из всех элементов этого компонента *Частота* имеет наибольшее влияние на долю рынка. Элементы *Поощрения* и *Творчество* имеют примерно одинаковое влияние, которое существенно меньше по сравнению с *Частотой*. На сегодняшний день (1994 год) различия между компаниями, лидирующими в сфере быстрого питания, минимальны. Следовательно, миллиардные затраты ежегодно уходят, главным образом, на то, чтобы привлечь потребителя к определенным ресторанам или продуктам.

Конкуренты — второй по важности компонент в данной модели, который включает трех весьма сходных по параметрам участников рынка

(Макдоналдс, Бургер Кинг, Вендис). Небольшие различия между компаниями являются причиной жесткой конкуренции между ними. В данную модель не были включены косвенные конкуренты, однако для этого не существует каких-либо препятствий, и при необходимости их можно добавить для большей точности прогноза.

Компонент, обозначенный ***Прочие***, содержит элементы, важные с точки зрения маркетинга, такие как *Цена*, *Место расположения*, *Качество обслуживания клиентов*, *Скорость*, *Чистота*, *Ассортимент блюд*, *Обслуживание на вынос* и *Репутация*. Самыми важными из них являются *Место расположения* и *Ассортимент блюд*. Элемент *Место расположения* имеет многозначный смысл, так как подразумевает расположение не только в рамках населенного пункта, но и в глобальном смысле. Когда речь идет о сетях ресторанов, распространившихся по всему миру, второй аспект становится весьма значимым. Чтобы лучше понять семантику данного элемента, необходимо познакомиться с концепцией *франчайзинга*. Франшизные предприятия в настоящее время составляют приблизительно 25 % американских ресторанов, и по грубым оценкам обеспечивают 43 % продаж в этой отрасли. Франчайзинг способствует быстрому расширению компаний, которые при этом частично освобождаются от солидных затрат на приобретение земли, зданий, и оборудования. В отношениях франчайзинга эти затраты полностью ложатся на франчайз*и* — предприятия, которые платят лицензионные платежи (обычно 3–5 % от стоимости продаж) родительской компании за право быть частью сети. Кроме того, такие предприятия тратят примерно 4 % от стоимости продаж на рекламу. Взамен франчайз*и* получают марку фирмы и поддержку в маркетинге, которую невозможно было бы получить другим способом. Некоторые компании тяготеют к франчайзингу, в то время как другие предпочитают иметь высокую долю собственных предприятий. Компании с разветвленной сетью предприятий могут обеспечить экономию средств, обусловленную масштабом, более высокую платежеспособность и возможность взаимной поддержки. Концепция сосредоточенной сети предоставляет лучшие возможности для централизованного управления. Некоторые ресторанные компании, в частности Макдоналдс и Вендис, создали свою репутацию, опираясь, в основном, на эту концепцию. В настоящее время примерно 70 % предприятий Вендис принадлежат франшизным компаниям. Вообще, результаты деятельности участников индустрии быстрого питания настолько разнообразны, что трудно сказать, какая концепция лучше.

Франчайзинг помог тысячам людей стать предпринимателями, уменьшив риск по сравнению с собственным бизнесом. С другой стороны, самостоятельные рестораны, которым не приходится платить за фирменную марку, обычно имеют более гибкую политику в отношении ассортимента и услуг, а также имеют больше возможностей для создания собственного стиля и атмосферы. В настоящее время Макдоналдс является коммерческим лидером в данной области индустрии, поэтому имеет смысл обсудить причины его успехов. В отличие от многих других родительских компаний, Макдоналдс — крупный владелец недвижимости, на которого работает множество франшизных предприятий под его фирменной маркой. Компания владеет множеством ресторанов по всему миру и продолжает создавать новые, получая арендную плату за собственность. Поступая таким образом, Макдоналдс передает своим агентам значительно большую часть своего капитала по сравнению с конкурентами и получает от своих франчайзи намного больший доход. Такая форма собственности позволяет Макдоналдсу иметь большое число предприятий на очень большой территории. Для потребителей наиболее предпочтительным является ресторан, который удобно расположен и имеет доступные цены. Удачное расположение обычно приводит к увеличению числа продаж. Рестораны в аэропортах и вдоль автострад всегда имеют клиентов и характеризуются специфическими факторами, побуждающими клиентов к покупкам. Некоторые компании быстрого питания уже начали открывать свои кафетерии для служащих и школьников.

Рестораны трех компаний, рассматриваемых в модели, предлагают клиентам почти одинаковые гамбургеры, но различаются предложением комплексов (комбинаций блюд). Некоторые компании расширяют ассортимент блюд, включая в него здоровую пищу, например салаты и жареных цыплят вместо гамбургеров с курицей. Разнообразие меню привлекает клиентов.

Репутация является третьим по важности элементом в компоненте ***Прочие***. Репутация связана с понятиями «быть на виду» и «не стоять на месте». В частности, спонсорская поддержка спортивных соревнований положительно влияет на репутацию.

Следующими по влиятельности в этом компоненте являются элементы *Обслуживание на вынос* и *Цена*. Они имеют одинаковую важность, так как *Обслуживание на вынос* играет важную роль в развитии ресторанной индустрии. Заказы на вынос особенно распространены на предприятиях быстрого питания, где специфика контакта с клиентами, например «через окно», делает этот вид обслуживания наиболее удобным и быстрым.

В течение последних нескольких лет (напомним, что задача решалась в 1994 году) увеличению прибылей ресторанов способствовали невысокие цены на продовольствие. Потребители столкнулись с последствиями застойной экономики только в 1993 году, когда цены на продукты в ресторанах немного выросли. Рестораны быстрого обслуживания стремятся к «хорошим ценам для клиентов». «Хорошие цены» означают обязательное наличие дешевых пунктов меню (например, стоимостью менее 1 доллара) и предложение потребителям комплекса блюд по более низкой цене по сравнению с их индивидуальной стоимостью. Предложение комплексов способствует увеличению объема продаж, в том числе продаж высоко прибыльных товаров, таких как французское жаркое и слабые спиртные напитки. Потери в цене компенсируются высоким объемом продаж комплексов. Комбинируя пункты меню, рестораны могут предложить больше продуктов за меньшую цену и повысить уровень продаж некоторых блюд, которые имеют низкий спрос без включения их в комплексы. В среднем, стоимость продуктов и напитков составляет приблизительно 33 % от суммы, которую потребители платят в ресторанах. Торговые надбавки на напитки обычно выше, чем на продукты питания. Когда люди платят 2 доллара за гамбургер, в котором стоимость продуктов составляет приблизительно 0.75 доллара (если их купить в универсаме), они платят за то, что им не придется готовить его самостоятельно.

Следующими по важности элементами компонента ***Прочие*** являются *Чистота* и *Скорость* обслуживания. Клиенты ценят чистоту в ресторанах быстрого питания и надеются на соблюдение всех санитарных норм. *Скорость* является одним из ключевых слов в названии данной индустрии и рассматривается как нечто, само собой разумеющееся. Элемент *Качество обслуживания клиентов* имеет минимальный приоритет среди элементов данного компонента.

Компонент ***Качество питания***, как это ни странно, занимает последнее место по важности среди всех четырех компонентов и содержит элементы: *Пищевая ценность*, *Вкус* и *Размер порции*. Из этих элементов наиболее влиятельным является последний. Такой результат, вероятно, отражает тот факт, что клиенты ресторанов быстрого питания не всегда руководствуются соображениями о вкусной и здоровой пище, хотя приоритет критерия *Пищевая ценность* становится более значимым при выборе блюд из меню.

Подводя итог сказанному, можно с уверенностью сказать, что реклама имеет существенное влияние на предпочтения клиентов ресторанов быстрого питания. В частности, лидер рынка Макдоналдс поддерживает многие спортивные мероприятия и имеет значительно большее количество предприятий (более 8900 точек только в США) по сравнению с конкурентами. Хотя в данном исследовании рассматривались только доли внутреннего рынка США, интересно отметить, что Макдоналдс имеет максимальное присутствие и на иностранных рынках, имея свыше 4000 ресторанов в более чем 60 странах (включая 1000 в одной Японии). С ним могут сравниться только три компании, основанные в США, которые получают более 500 миллионов долларов от иностранных продаж (KFC, Pizza Hut и Burger King).

Поскольку американская нация стареет, в будущем можно ожидать, что владельцы ресторанов будут постепенно трансформировать предприятия быстрого питания в рестораны с обедами среднего уровня. Экономический аспект выбора существенно зависит от того, насколько люди ценят

Таблица 4-10

Исходная суперматрица

		1 Конкуренты			2 Реклама			3 Качество питания			4 Прочие							
		1 McD's	2 Burger K	3 Wendy's	1 Творчество	2 Поощрения	3 Частота	1 Пищевая ценность	2 Вкус	3 Размер порции	1 Цена	2 Место	3 Качество обслуживания	4 Скорость	5 Чистота	6 Меню	7 Обслуживание на вынос	8 Репутация
1 Конкуренты	1 McD's	0.0000	0.8333	0.7500	0.6141	0.7174	0.7174	0.2488	0.2899	0.5989	0.6531	0.6531	0.3319	0.5387	0.2500	0.4934	0.4837	0.6749
	2 Burger K	0.8000	0.0000	0.2500	0.2685	0.1942	0.1942	0.1561	0.1040	0.1262	0.2507	0.2507	0.1388	0.3624	0.2500	0.1958	0.3133	0.2238
	3 Wendy's	0.2000	0.1667	0.0000	0.1174	0.0884	0.0884	0.5951	0.6061	0.2749	0.0962	0.0962	0.5293	0.0989	0.5000	0.3108	0.2029	0.1012
2 Реклама	1 Творчество	0.2074	0.1783	0.2810	0.0000	0.3333	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0780	0.0000	0.0819
	2 Поощрения	0.1298	0.1120	0.0720	0.1250	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1711	0.0000	0.3678
	3 Частота	0.6628	0.7096	0.6470	0.8750	0.6667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.7509	0.0000	0.5503
3 Качество питания	1 Пищевая ценность	0.3319	0.2810	0.6241	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0756	0.0000	0.0936
	2 Вкус	0.1388	0.0720	0.2823	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6952	0.0000	0.6241
	3 Размер порции	0.5293	0.6470	0.0936	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2292	0.0000	0.2823
4 Прочие	1 Цена	0.0329	0.2408	0.0300	0.0000	0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.8571	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1153	0.0000	0.0627
	2 Место	0.1063	0.2231	0.1417	0.7095	0.0000	0.1958	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0981	0.0000	0.1711	0.0526	0.6572	0.2653
	3 Качество обслужив.	0.0237	0.1418	0.0648	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1873	0.0780	0.0000	0.0548	0.0444
	4 Скорость	0.0483	0.1407	0.0641	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2857	0.0000	0.7509	0.1946	0.2880	0.0835
	5 Чистота	0.3328	0.1096	0.2756	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5181	0.0000	0.0000	0.6375	0.0000	0.2378
	6 Меню	0.1593	0.0512	0.1571	0.1377	0.1667	0.3108	0.0000	0.0000	0.8571	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1929
	7 Обслужив. на вынос	0.0736	0.0506	0.0589	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.7313	0.0000	0.0000	0.0000	0.0567
	8 Репутация	0.2232	0.0422	0.2078	0.1528	0.0000	0.4934	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0981	0.0814	0.0000	0.0000	0.0000	0.0567

Таблица 4-11

Взвешенная суперматрица

		1 Конкуренты			2 Реклама			3 Качество питания			4 Прочие							
		1 McD's	2 Burger K	3 Wendy's	1 Творчество	2 Поощрения	3 Частота	1 Пищевая ценность	2 Вкус	3 Размер порции	1 Цена	2 Место	3 Качество обслуживания	4 Скорость	5 Чистота	6 Меню	Обслуживание	8 Репутация
1 Конкуренты	1 McD's	0.0000	0.8333	0.7500	0.6141	0.7174	0.7174	0.2488	0.2899	0.5989	0.6531	0.6531	0.3319	0.5387	0.2500	0.4934	0.4837	0.6749
	2 Burger K	0.8000	0.0000	0.2500	0.2685	0.1942	0.1942	0.1561	0.1040	0.1262	0.2507	0.2507	0.1388	0.3624	0.2500	0.1958	0.3133	0.2238
	3 Wendy's	0.2000	0.1667	0.0000	0.1174	0.0884	0.0884	0.5951	0.6061	0.2749	0.0962	0.0962	0.5293	0.0989	0.5000	0.3108	0.2029	0.1012
2 Реклама	1 Творчество	0.2074	0.1783	0.2810	0.0000	0.3333	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0780	0.0000	0.0819
	2 Поощрения	0.1298	0.1120	0.0720	0.1250	0.0000	0.5000	0.0000	0.0000	0.0000	0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1711	0.0000	0.3678
	3 Частота	0.6628	0.7096	0.6470	0.8750	0.6667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.7509	0.0000	0.5503
3 Качество питания	1 Пищевая ценность	0.3319	0.2810	0.6241	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1667	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0756	0.0000	0.0936
	2 Вкус	0.1388	0.0720	0.2823	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.6952	0.0000	0.6241
	3 Размер порции	0.5293	0.6470	0.0936	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2292	0.0000	0.2823
4 Прочие	1 Цена	0.0329	0.2408	0.0300	0.0000	0.8333	0.0000	0.0000	0.0000	0.8571	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1153	0.0000	0.0627
	2 Место	0.1063	0.2231	0.1417	0.7095	0.0000	0.1958	0.0000	0.0000	0.0000	0.5000	0.0000	0.0981	0.0000	0.1711	0.0526	0.6572	0.2653
	3 Качество обслужив.	0.0237	0.1418	0.0648	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1873	0.0780	0.0000	0.0548	0.0444
	4 Скорость	0.0483	0.1407	0.0641	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.2857	0.0000	0.7509	0.1946	0.2880	0.0835
	5 Чистота	0.3328	0.1096	0.2756	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.5181	0.0000	0.0000	0.6375	0.0000	0.2378
	6 Меню	0.1593	0.0512	0.1571	0.1377	0.1667	0.3108	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1929
	7 Обслужив. на вынос	0.0736	0.0506	0.0589	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.1429	0.5000	0.0000	0.0000	0.7313	0.0000	0.0000	0.0000	0.0567
	8 Репутация	0.2232	0.0422	0.2078	0.1528	0.0000	0.4934	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0981	0.0814	0.0000	0.0000	0.0000	0.0567

Таблица 4-12

Предельная суперматрица

		1 Конкуренты			2 Реклама			3 Качество питания			4 Прочие							
		1 McD's	2 Burger K	3 Wendy's	1 Творчество	2 Поощрения	3 Частота	1 Пищевая ценность	2 Вкус	3 Размер порции	1 Цена	2 Место	3 Качество обслуживания	4 Скорость	5 Чистота	6 Меню	7 Обслуживание на вынос	8 Репутация
1 Конкуренты	1 McD's	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749	0.1749
	2 Burger K	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883	0.0883
	3 Wendy's	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520	0.0520
2 Реклама	1 Творчество	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727	0.0727
	2 Поощрения	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878	0.0878
	3 Частота	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905	0.1905
3 Качество питания	1 Пищевая ценность	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087	0.0087
	2 Вкус	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076	0.0076
	3 Размер порции	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145	0.0145
4 Прочие	1 Цена	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462	0.0462
	2 Место	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681	0.0681
	3 Качество обслужив.	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091	0.0091
	4 Скорость	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248	0.0248
	5 Чистота	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271	0.0271
	6 Меню	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474	0.0474
	7 Обслужив. на вынос	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210	0.0210
	8 Репутация	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596	0.0596

Таблица 4-13

Матрица взаимного влияния компонентов

	1 Конкуренты	2 Реклама	3 Качество питания	4 Прочие
1 Конкуренты	0.2128	0.2956	0.5000	0.1304
2 Реклама	0.5319	0.2571	0.0000	0.6079
3 Качество питания	0.0659	0.0000	0.0000	0.0655
4 Прочие	0.1893	0.4473	0.5000	0.1961

Таблица 4-14

Предельные приоритеты

		Приоритеты из предельной суперматрицы	Приоритеты, нормированные по компонентам (кластерам)
1 Конку-ренты	1 McD's	0.1749	0.5549
	2 Burger King	0.0883	0.2801
	3 Wendy's	0.0520	0.1650
2 Реклама	1 Творчество	0.0727	0.2071
	2 Поощрения	0.0878	0.2501
	3 Частота	0.1905	0.5427
3 Качество питания	1 Пищевая ценность	0.0087	0.2825
	2 Вкус	0.0076	0.2468
	3 Размер порции	0.0145	0.4708
4 Прочие	1 Цена	0.0462	0.1523
	2 Место	0.0681	0.2245
	3 Качество обслуживания	0.0091	0.0300
	4 Скорость	0.0248	0.0818
	5 Чистота	0.0271	0.0894
	6 Ассортимент (меню)	0.0474	0.1563
	7 Обслуживание на вынос	0.0210	0.0692
	8 Репутация	0.0596	0.1965

свое время. Поколение людей, рожденных после Второй мировой войны, достигло своего расцвета, обеспечив себе благосостояние многолетним трудом, поэтому оно, вероятно, будет ценить уютную обстановку и нестандартное меню, отдавая предпочтение ресторанам с полным обслуживанием и сидячими местами. Тем временем рестораны быстрого питания будут вынуждены сместить акценты в сторону качества обслуживания, привлекательных цен и более здорового ассортимента блюд, чтобы избежать падения спроса, которое возможно в будущем. Мы не приводим матрицы парных сравнений для данного примера, но приводим полученные из них векторы приоритетов, которые записаны в столбцах суперматрицы (табл. 4-10), где нулевые блоки указывают на отсутствие влияния. Весовые коэффициенты компонентов суперматрицы были определены путем их парных сравнений по силе влияния на каждый компонент. Приоритеты компонентов приведены в табл. 4-13. Они использовались в качестве весов соответствующих блоков суперматрицы в процессе ее приведения к стохастическому виду (табл. 4-11). Стохастическая матрица возводилась в предельные степени (табл. 4-12), после чего была проведена нормализация по блокам (компонентам), результаты которой проказаны в табл. 4-14. Поскольку предельная матрица не содержит нулей, то можно утверждать, что и некоторая степень взвешенной суперматрицы также не содержит нулей, следовательно, суперматрица в табл. 4-11 является примитивной.

Предельные приоритеты показывают прогнозируемые значения долей рынка для трех компаний быстрого питания. Используя полученные результаты, конкуренты могут скорректировать свои маркетинговые политики, ориентируясь на доминирующие факторы в модели, с тем чтобы увеличить свои доли рынка. Для детального планирования политик и возможных стратегий можно провести анализ чувствительности модели.

Доли рынка рассмотренных фирм, определенные с помощью суперматричной модели, составляют:

- Макдоналдс (McD's) — 55.5 %;
- Бургер Кинг (Burger King) — 28.0 %;
- Вендис (Wendy's) — 16.5 %.

Нормализованные статистические данные для этих ресторанов, выраженные через объемы продаж в долларах (были обнародованы в марте 1993 года, опубликованы в *Market Share Reporter*, в 1994 году), показывают следующее распределение рынка:

- Макдоналдс (McD's) — 61.4 %;
- Бургер Кинг (Burger King) — 25.1 %;
- Вендис (Wendy's) — 13.5 %.

С учетом 15 других конкурентов, занимающих верхние позиции на рынке в индустрии быстрого питания, статистика на начало 1994 года дает следующие цифры:

- Макдоналдс (McD's) — 32.3 %;
- Бургер Кинг (Burger King) — 13.2 %;
- Вендис (Wendy's) — 7.1 %;
- Остальные — 47.4 %.

Эти цифры показывают, что компания Макдоналдс владеет почти третьей частью всего американского рынка быстрого питания, что согласуется с полученными результатами сетевого анализа.

4-6. Опять про быстрое питание (приводимая матрица с простым корнем уравнения λ_{max} = 1)

В этом примере рассмотрим приводимую суперматрицу с простым корнем характеристического уравнения $\lambda_{max} = 1$, которая не дает циклов при возведении в степени. Вернемся к задаче о распределении рынка среди сетевых ресторанов быстрого питания, изменив ее структуру, как показано на рис. 4-7, где над компонентом *Конкуренты* появилась небольшая иерархия. Наша цель состоит в том, чтобы решить, следует ли компаниям Макдоналдс, Бургер Кинг и Вендис стремиться к расширению своих зарубежных рынков, конкурируя с приоритетами {0.657, 0.196, 0.147}, или будет разумнее развиваться в пределах США с прогнозируемыми приоритетами {0.540, 0.297, 0.163}. Добавленная к сети иерархия содержит компоненты ***Цель*** и ***Способы достижения***, в состав последнего входят элементы *Интернационализация* с приоритетом 0.2 и *Внутренний рынок* с приоритетом 0.8. Отметим, что предельная суперматрица этой задачи совпадает с результатом, полученным в предыдущем разделе, так как компонент *Способы достижения* не имеет обратной связи с кластером *Конкуренты*, т. е. здесь мы видим, что влияние компонентов, ведущих к циклу, теряется в предельных приоритетах. Результаты решения задачи приведеныы в табл. 4-15–4-19.

Таблица 4-15

Матрица приоритетов компонентов

	1	2	3	4
1 Конкуренты	0.2146	0.2470	0.1243	0.1290
2 Реклама	0.5327	0.6223	0.3586	0.6066
3 Качество питания	0.0657	0.0000	0.5171	0.0660
4 Прочие	0.1869	0.1307	0.0000	0.1984

Таблица 4-16

Ненормированная суперматрица

		1 Цель	2 Способы достижения		3 Конкуренты			4 Реклама			5 Качество питания			6 Прочие							
		1.1	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8
1)	1.1 Цель																				
2)	2.1 Интер-нац.	0.2																			
	2.2 Вну-тренн.	0.8																			
	3.1 McD's		0.657	0.54		0.833	0.75	0.614	0.717	0.717	0.249	0.291	0.595	0.655	0.655	0 333	0.537	0.25	0.493	0.493	0.674
3)	3.2 Burger K		0.196	0.297	0.8		0.25	0.268	0.195	0.195	0.157	0.105	0.128	0.25	0.25	0.14	0.364	0.25	0.196	0.311	0.226
	3.3 Wendy's		0.147	0.163	0.2	0.167		0.117	0 088	0.088	0.594	0.605	0 276	0 095	0.095	0.528	0.099	0.5	0 311	0.196	0.101
	4.1 Твор-чество				0.208	0.179	0.279		0 333	0.500									0 078		0 082
4)	4.2 Поощре-ния				0.131	0.113	0.072	0 125		0.500				0 833					0.171		0 368
	4.3 Частота				0.661	0 709	0.649	0 875	0.667					0 167					0.750		0.55
	5.1 Пищевая ценность				0.333	0.279	0.627							0 167					0.075		0 094
5)	5.2 Вкус				0 14	0 072	0.28												0.696		0.627
	5.3 Размер порции				0.528	0.649	0.094							0.833					0.229		0.28

Окончание таблицы 4-16

		1.1	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8
6)	**6.1 Цена**				0.033	0.239	0.03		0.833				0.857								
	6.2 Место				0.107	0.224	0.142	0.707		0.196									0.117		0.066
	6.3 Качество обслуж.				0.024	0.143	0.065							0.5		0.098		0.171	0.053	0.655	0.280
	6.4 Скорость				0 048	0.14	0.064										0 188	0.078		0.055	0.048
	6.5 Чистота				0.333	0.110	0.276									0.285		0.75	0.194	0.29	0.088
	6.6 Меню				0.159	0.051	0.157	0.135	0.167	0.311						0.519			0.637		0.253
	6.7 Обслу-жив. на вынос				0.074	0.051	0.059						0.143	0.5			0.731				0.204
	6.8 Репу-тация				0.224	0.042	0.207	0.155		0.493						0.098	0.081				0.06

Таблица 4-17

Взвешенная суперматрица

		1 Цель	**2 Способы достижения**		**3 Конкуренты**			**4 Реклама**			**5 Качество питания**			**6 Прочие**							
		1.1	**2.1**	**2.2**	**3.1**	**3.2**	**3.3**	**4.1**	**4.2**	**4.3**	**5.1**	**5.2**	**5.3**	**6.1**	**6.2**	**6.3**	**6.4**	**6.5**	**6.6**	**6.7**	**6.8**
1)	**1.1 Цель**																				
2)	**2.1 Интернац.**	0.2																			
	2.2 Внутренн.	0.8																			

Окончание таблицы 4-17

3)	3.1 McD's	0.6571	0.5396		0.1788	0.161	0.1517	0.1771	0.1771	0.1247	0.1453	0.2977	0.0845	0.0845	0.0429	0.0692	0.0323	0.0636	0.0636	0.0869
	3.2 Burger K	0.1963	0.297	0.1717		0.0537	0.0663	0.0481	0.0481	0.0785	0.0524	0.0642	0.0322	0.0322	0.018	0.047	0.0323	0.0253	0.0401	0.0291
	3.3 Wendy's	0.1466	0.1634	0.0429	0.0358		0.0289	0.0218	0.0218	0.2968	0.3023	0.1382	0.0123	0.0123	0.0681	0.0128	0.0645	0.0401	0.0253	0.013
4)	4.1 Творчество			0.1109	0.0951	0.1486		0.2074	0.3111									0.0474		0.0498
	4.2 Поощрения			0.0698	0.0599	0.0383	0.0778		0.3111				0.5055					0.1040		0.2232
	4.3 Частота			0.352	0.3776	0.1486	0.5445	0.4149					0.1011					0.4552		0.3335
5)	5.1 Пищевая ценность			0.0218	0.0183	0.0412							0.011					0.005		0.0062
	5.2 Вкус			0.0092	0.0047	0.0184												0.0459		0.0414
	5.3 Размер порции			0.0347	0.0426	0.0061							0.055					0.0151		0.0185
6)	6.1 Цена			0.0061	0.0238	0.0056		0.1089				0.4286								
	6.2 Место			0.02	0.0492	0.0266	0.0927		0.0356									0.0231		0.0131
	6.3 Качество обслуж.			0.0044	0.0063	0.0121							0.0992		0.0195		0.0340	0.0105	0.13	0.0556
	6.4 Скорость			0.009	0.0313	0.012										0.0374	0.0155		0.0109	0.0094
	6.5 Чистота			0.0622	0.025	0.0516									0.0565		0.1489	0.0384	0.0575	0.0175
	6.6 Меню			0.0296	0.008	0.0293	0.0177	0.0218	0.0406						0.1029			0.1264		0.0503
	6.7 Обслуж. на вынос			0.0138	0.0228	0.011						0.0715	0.0992			0.145				0.0405
	6.8 Репутация			0.0418	0.0205	0.0387	0.0196		0.0645						0.0195	0.0161				0.012

Таблица 4-18

Предельная суперматрица

		1 Цель	2 Способы достижения		3 Конкуренты			4 Реклама			5 Качество питания			6 Прочие							
		1.1	2.1	2.2	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8
1)	1.1 Цель																				
2)	2.1 Интернац.																				
	2.2 Внутренн.																				
3)	3.1 McD's	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557	0.1557
	3.2 Burger K	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792	0.0792
	3.3 Wendy's	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434	0.0434
4)	4.1 Творч-тво	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141	0.141
	4.2 Поощрения	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288	0.1288
	4.3 Частота	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572	0.2572
5)	5.1 Пищевая ценность	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072	0.0072
	5.2 Вкус	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054	0.0054
	5.3 Размер порции	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112	0.0112
6)	6.1 Цена	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208	0.0208
	6.2 Место	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368	0.0368
	6.3 Качество обслуж.	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052	0.0052
	6.4 Скорость	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178
	6.5 Чистота	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213	0.0213
	6.6 Меню	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338	0.0338
	6.7 Обслужив. на вынос	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006	0.006
	6.8 Репутация	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292	0.0292

Таблица 4-19

Предельная суперматрица, нормализованная по компонентам

		1 Цель	2 Способы достижения		3 Конкуренты			4 Реклама			5 Качество питания			6 Прочие							
		1.1	2.1	1.2	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	6.1	6.2	6.3	6.4	6.5	6.6	6.7	6.8
1)	1.1 Цель	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
2)	2.1 Интернац.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	2.2 Внутренн.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3)	3.1 McD's	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593	0.5593
	3.2 Burger K	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844	0.2844
	3.3 Wendy's	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156	0.156
4)	4.1 Творч-тво	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488	0.488
	4.2 Поощрения	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444	0.2444
	4.3 Частота	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676	0.2676
5)	5.1 Пищевая ценность	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032	0.3032
	5.2 Вкус	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253	0.2253
	5.3 Размер порции	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472	0.472
6)	6.1 Цена	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215	0.1215
	6.2 Место	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215	0.215
	6.3 Качество обслужив.	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306	0.0306
	6.4 Скорость	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044	0.1044
	6.5 Чистота	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246	0.1246
	6.6 Меню	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979	0.1979
	6.7 Обслужив. на вынос	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349	0.0349
	6.8 Репутация	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711	0.1711

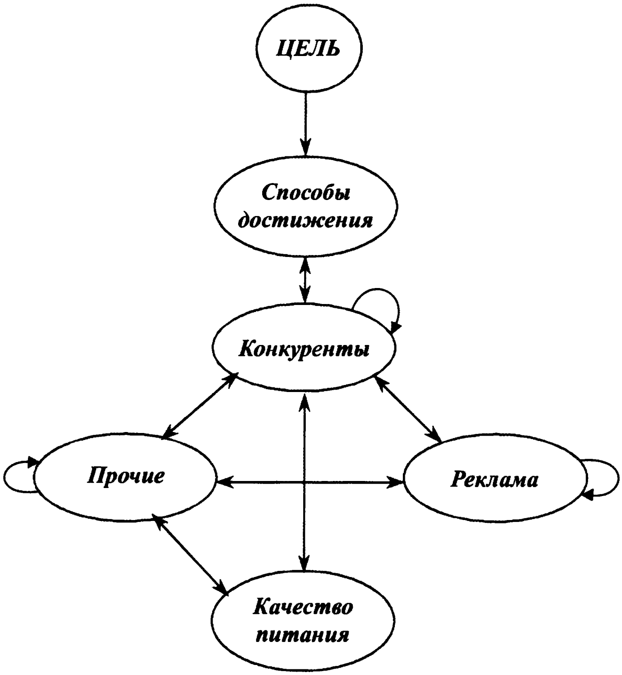


Рис. 4-7. Задача с приводимой суперматрицей, имеющей простой корень уравнения $\lambda_{max} = 1$

Литература

1. *Saaty T. L.* Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with The Analytic Hierarchy Process. Pittsburgh, PA: RWS Publications, 1994.
2. *Blair A., Nachtmann R., Olson J., and Saaty T. L.* Forecasting Foreign Exchange Rates: An Expert Judgment Approach // Socio-Economic Planning Sciences. 1987. 21. 6. P. 363–369.

Глава 5

Применение метода аналитических сетей в принятии решений

5-1. Введение

МАС представляет собой универсальную теорию измерений влияния в шкале отношений с учетом зависимостей и обратных связей. Эта глава посвящена приложениям МАС к сложным задачам принятия решений. Прежде чем рассматривать приложения, мы опишем структуру, которая характерна для большинства сложных решений, и основные этапы вычисления приоритетов на основе этой структуры. Безусловно, не все этапы, которые здесь описаны, должны выполняться во всех задачах, и мы увидим это на примерах. Мы повторяем часть материала из предшествующих глав для тех читателей, которые их пропустили и сразу перешли к приложениям МАС.

Для понимания подхода к задачам принятия решений в условиях взаимной зависимости элементов полезны следующие наблюдения. Искомое решение будет настолько объективным, насколько однозначно смогут понять его разные люди. Когда мы интерпретируем цифры, мы сравниваем их со знаниями, приобретенными из собственного опыта, и эта процедура не может быть объективной, потому что знания, опыт и компетентность у разных людей существенно отличаются. Одни и те же объективные факты имеют неодинаковое значение для разных людей. В конечном счете, предпочтительность решения базируется не на его скрытой объективности, а на том, как интерпретируется восприятие этой объективности в рамках нашей индивидуальной системы ценностей и какое значение мы придаем рассматриваемым ценностям. Мы можем совершить свой субъективный выбор без подробного анализа фактов и оценки наших нечетких предпочтений, указав альтернативу, которая нам больше нравится. Однако, принимая ответственные решения, опасно полагаться только на интуицию, поэтому необходимо тщательно проанализировать факты, лежащие в основе решения, чтобы выявить его положительные и отрицательные аспекты, включая риски и возможности, с которыми мы столкнемся при его реализации. Прежде чем сделать заключение, следует сосредоточиться на сущности решения. В любом случае мы будем иметь дело с системой субъективных ценностей, которая определяет, какой результат будет лучшим для ЛПР. При этом даже объективные показатели решения преломляются в свете субъективных представлений, ориентированных на достижение персональных целей.

Применяя МАИ и МАС, можно делать то, чего не позволяет делать математическая логика, основанная только на вербальных суждениях, без чисел. В МАИ и МАС можно обрабатывать числовые оценки предпочтений, в то время как логика позволяет получить только порядковые предпочтения на основе вербальных оценок. В МАИ суждение можно представить, например, в следующем виде: «*A* предпочтительнее *B* в пять раз». Средствами обычной логики, с учетом аксиомы транзитивности предпочтений, это суждение можно представить только как «*A* предпочтительнее *B*», т. е. самая важная величина (пять раз), показывающая интенсивность предпочтения, не учитывается. Применение чисел позволяет нам выполнять арифметические операции над ними, для того чтобы синтезировать обобщенный результат из множества предпочтений с большей точностью, учитывая степень согласованности суждений. Правила пропозициональной логики имеют свои аналоги в иерархиях и сетях. Логические операторы импликации (ЕСЛИ — ТО), конъюнкции (И) и дизъюнкции (ИЛИ) используются в сетях, где с помощью импликации можно представить переходы от одного узла к другому, а операторы конъюнкции и дизъюнкции описывают связи между узлами сети или иерархии. Так как в МАИ и МАС используются интенсивности предпочтений, то ощущения и эмоции ЛПР являются не менее важными для полного понимая проблемы, чем рациональное мышление.

В принятии решений следует четко понимать различия между иерархическими и сетевыми структурами, которые применяются для представления проблем. Иерархия состоит из уровней, расположенных в порядке убывания важности. Элементы каждого уровня сравниваются по доминированию или влиянию относительно элементов соседнего верхнего уровня. Ветви иерархии направлены от главной цели вниз, даже если элементы нижних уровней влияют на элементы более высоких уровней. Влияние — это особый вид взаимодействия. Направление связей сверху вниз стимулирует проявление влияния элементов нижних уровней на те, что расположены выше.

Сеть представляет собой набор компонентов, которые являются аналогами уровней в иерархии. Компоненты, связанные направленными дугами, могут располагаться в произвольном порядке. Направление влияния одного компонента на другой противоположно направлению стрелки на дуге, связывающей два этих компонента. В процессе парных сравнений объектов в одном компоненте выявляется доминирование влияния элементов пары на третий элемент, принадлежащий этому или другому компоненту. Кроме того, в сетевых задачах компоненты могут рассматриваться как взаимодействующие объекты, которые влияют друг на друга относительно некоторого критерия или свойства более высокого порядка. Мы называем такие свойства управляющими критериями, которые могут образовывать целую систему показателей для оценки качества решения. Управляющие критерии и их детализирующие подкритерии служат основой для проведения парных сравнений компонентов и содержащихся в них элементов. В иерархии нет необходимости сравнивать уровни по влиянию, потому что они уже расположены в порядке убывания важности (сверху вниз). Критериями для проведения сравнений являются либо элементы уровней, либо неявно сформулированная главная цель. Во втором случае экспертам обычно предлагают сравнить объекты по *важности*, *предпочтению* или *вероятности* относительно цели без уточнения того, о какой важности идет речь. Управляющие критерии для проведения сравнений в сети должны быть четко сформулированы, т. е. здесь понятие *важности* требует четкой интерпретации.

В процессе сравнений элементов иерархии мы задаем вопрос: какой из двух объектов оказывает большее влияние (или в большей степени подвержен влиянию) на заданный объект выше расположенного уровня? При сравнении элементов в сетях следует задавать другой вопрос: какой из двух объектов сильнее влияет на некоторый третий объект в смысле управляющего критерия? Как в иерархиях, так и в сетях смысл и направление влияния должны сохраняться на всем протяжении процедуры анализа; нельзя смешивать сравнения, в которых используются разные вопросы (какой из двух элементов больше влияет на третий? на какой из двух элементов больше влияет третий?). Напомним, что стрелки в сетевых диаграммах означают, что элементы компонентов, в которые они входят, влияют на элементы компонентов, от которых эти стрелки берут начало.

МАС освобождает нас от линейного упорядочивания компонентов, которое необходимо в иерархии. Мы можем представить любое решение в виде ориентированной сети, в то время как в МАИ обрабатываются более простые и наглядные структуры, в которых потоки влияния строго направлены сверху вниз. МАС позволяет обрабатывать более разнообразные и естественные структуры, и в этом смысле является более достоверным способом описания реальности. Это позволяет предполагать, что иерархические решения из-за жесткой структуры, вероятно, будут более субъективными и предопределенными по сравнению с сетевыми. Учет зависимостей и обратных связей между элементами, а также циклов влияния в МАС предоставляет возможность более объективного и правдоподобного представления действительности. Этот метод позволяет делать выводы, которые трудно (а часто невозможно) получить путем строгих логических рассуждений. Суммируя сказанное, можно заключить, что МАС является гораздо более мощным инструментом для принятия решений, чем МАИ. Но МАС требует бо́льших затрат труда для представления фактов и их взаимосвязей. Для сложных проблем, где необходим детальный анализ, у нас нет другого выхода. Для менее сложных решений, в условиях дефицита времени, длительный и трудоемкий анализ может обесценить полученные результаты. Для принятия обыденных решений, индивидуальных или групповых, МАС ненамного лучше МАИ в отношении представления реальности. Принимая ответственные решения, необходимо применять МАС, который требует солидных затрат времени на проведение анализа. Вероятно, в будущем МАС будет стандартным способом принятия серьезных решений. Этому способствует распространение данной методологии и соответствующего программного обеспечения. Интересно отметить, что и МАИ, и МАС получили широкое распространение только в эпоху всеобщей компьютеризации, хотя обработка суперматриц в МАС сильнее нуждается в компьютерной поддержке, чем процедура иерархической композиции в МАИ. Другими словами, научно обоснованный подход к принятию решений с взаимной зависимостью и обратными связями стал реально возможным совсем недавно.

Любое решение можно описать структурой (рис. 5-1 а), включающей три составляющих: 1 — персональная система ценностей; 2 — качество решения, которое можно представить в терминах выгод, издержек, возможностей и рисков (*BOCR*); 3 — иерархия или сеть влияний и «объективных» фактов, определяющих предпочтительность альтернатив. Каждая из этих составляющих содержит главные аспекты, которые декомпозированы на менее главные и т. д. Мы называем их критериями и подкритериями. Из них могут быть сформированы иерархии или сети для любой из трех составляющих. Полное множество факторов, принадлежащих всем трем частям, иногда можно представить одной сетевой структурой, если это имеет смысл. Знания самого высшего уровня о персональных ценностях, для оценки которых используется абсолютный способ измерения, могут обогащаться информацией, поступающей с ниже расположенных уровней, однако приоритеты ценностей не зависят от этой информации. Индивидуальные ценности обеспечивают цели, в соответствии с которыми оценивается качество решения в свете выгод, возможностей, издержек и рисков. Эти уровни трудно интегрировать в единую структуру. В большинстве задач принятия решений могут существовать три или четыре смежных диапазона однородных элементов, представляющих персональные

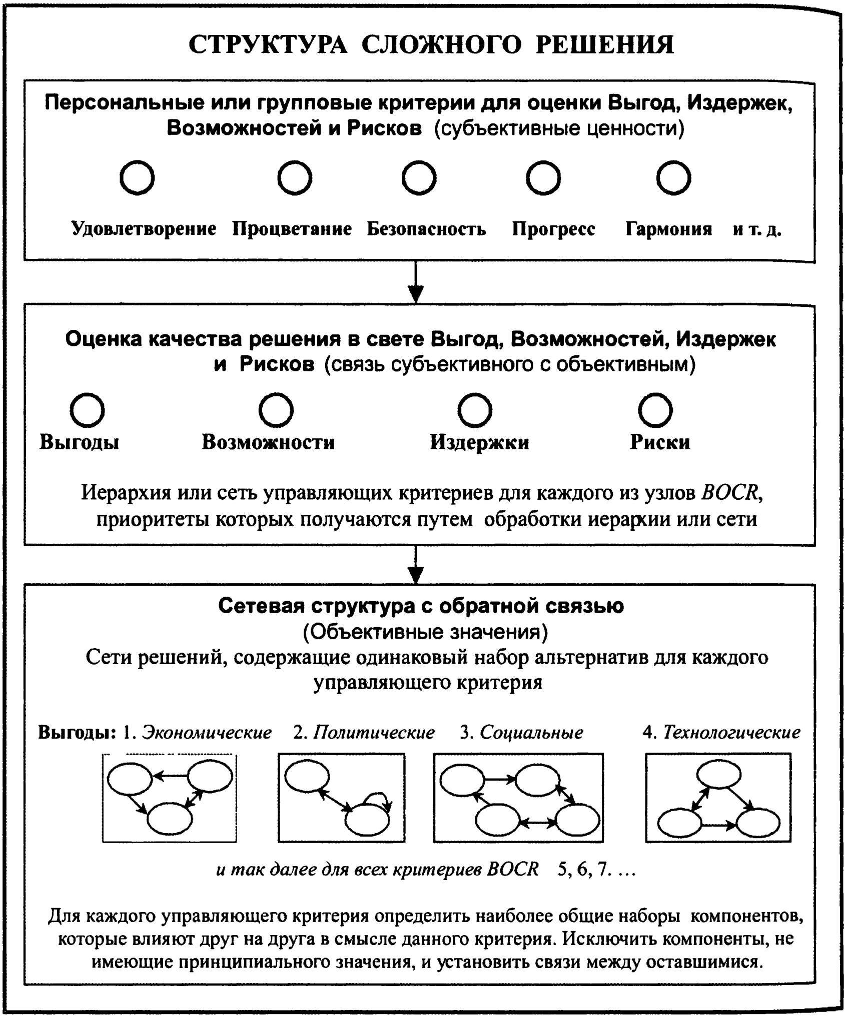


Рис. 5-1 а. Структура сложного решения

ценности (А. Маслоу разделяет их на семь групп). Мы выделяем следующие диапазоны ценностей в порядке убывания важности:

1) выживание, здоровье, безопасность, семья, друзья и религиозные убеждения;
2) карьера, образование, качество и стиль жизни;
3) политические и социальные взгляды;
4) философские идеи и мысли, а также разнообразные мнения (которые могут изменяться) о любых аспектах действительности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИОРИТЕТОВ СЛОЖНОГО РЕШЕНИЯ

Персональные или групповые критерии для оценки Выгод, Издержек, Возможностей и Рисков (субъективные ценности)

1. Идентифицировать индивидуальные или групповые критерии и подкритерии для оценки всех исследуемых решений и определить их приоритеты.
2. Установить интенсивности (лингвистические стандарты) для всех критериев или подкритериев нижнего уровня иерархии и определить приоритеты стандартов.
3. Произвести оценку Выгод, Возможностей, Издержек и Рисков с использованием стандартов и нормировать полученные значения.

↓

Управляющие иерархии для Выгод, Возможностей, Издержек и Рисков (связь субъективного с объективным)

Выгоды (B) **Возможности (O)** **Издержки (C)** **Риски (R)**

Идентифицировать управляющие критерии и подкритерии для каждой категории **BOCR**

↓

Сетевая структура с обратной связью (объективные значения)

Сети решений для каждой категории **BOCR** с одинаковыми наборами альтернатив

1. Для каждой сети, соответствующей одному из управляющих критериев *Выгод*, вычислить приоритеты из матриц парных сравнений и записать их в соответствующие столбцы суперматрицы. Сделать то же самое для всех управляющих критериев под категориями **BOCR**
2. Провести попарное сравнение взаимного влияния компонентов сети относительно управляющего критерия и использовать полученные приоритеты для взвешивания соответствующих блоков суперматрицы. Вычислить предельные приоритеты путем возведения суперматрицы в большие степени.

↓

Синтез

1. Получить из предельной суперматрицы приоритеты альтернатив по каждому управляющему критерию из иерархий **BOCR**.
2. Осуществить синтез полученных приоритетов альтернатив на иерархиях Выгод, Возможностей, Издержек и Рисков.
3. Определить заключительные приоритеты альтернатив путем обобщения значений по Выгодам, Возможностям, Издержкам и Рискам.

Рис. 5-1 b. Порядок вычисления приоритетов сложных решений

Подобные группы ценностей можно сформулировать для определенной группы людей, корпорации, страны или даже для всего человечества, что сделано, например, Организацией Объединенных Наций. Мы не будем перечислять здесь список этих ценностей, потому что они изложены в других работах по МАИ и МАС и их нетрудно сформулировать самостоятельно.

На рис. 5-1 b показано, как выполняется синтез приоритетов на различных частях структуры, приведенной на рис. 5-1 а, а также синтез обобщенных значений по всей структуре.

Сначала устанавливаются приоритеты персональных ценностей. Затем оценивается каждый из четырех компонентов качества решения (*BOCR*) по персональным ценностям первого уровня. На следующем шаге выделяются управляющие критерии для *BOCR* и устанавливаются их приоритеты и, наконец, строятся сетевые структуры для каждого из управляющих критериев и определяются приоритеты их элементов. Чтобы получить интересующий нас результат, мы синтезируем приоритеты альтернатив для выгод, возможностей, издержек и рисков, получая четыре различных ранжирования заданного набора альтернатив. Приоритеты выгод, возможностей, издержек и рисков используются в качестве весовых коэффициентов при синтезе обобщенных приоритетов альтернатив, которые получаются на основе четырех структур качества. При этом применяется мультипликативный принцип обобщения выделенных категорий качества (*BOCR*) с использованием обратных величин результирующих приоритетов альтернатив по издержкам и рискам. Таким способом осуществляется переход от первоначальных приоритетов альтернатив по издержкам и рискам, высокие значения которых соответствовали более дорогостоящим и более опасным альтернативам, к приоритетам, высокие значения которых соответствуют менее дорогостоящим и менее опасным альтернативам (см. ниже пример о торговых отношениях с Китаем). Напомним, что парные сравнения позволяют нам судить о доминировании *большего* из двух элементов над *меньшим*, поскольку *меньший* элемент рассматривается как единица для измерения *большего*. Следовательно, при парных сравнениях мы должны задавать вопрос, какой из элементов является *более дорогостоящим* или *более опасным*, а затем брать обратную величину, чтобы характеризовать менее дорогостоящие и менее опасные альтернативы.

Часто анализ выполняется в обратной последовательности, от иерархий и сетей влияния нижнего уровня постепенно поднимаются вверх, для того чтобы глубже понять проблему и получить оценку качества исследуемого решения.

Почему мы используем обратные значения приоритетов альтернатив по издержкам и рискам, а не какой-нибудь другой способ? Это легко показать на классическом примере выбора из множества альтернатив по двум критериям, которые имеют стоимостную окраску и выражены в долларах. Такой пример рассмотрен в следующем разделе, где показано, что для получения правильных значений обобщенных приоритетов альтернатив нужно сначала вычислить приоритет каждого критерия, разделив сумму стоимостей всех альтернатив по данному критерию на сумму их стоимостей по обоим критериям. Затем нужно вычислить нормированные значения стоимостей альтернатив по каждому критерию, умножить их на приоритеты соответствующих критериев и сложить, чтобы получить правильный результат. Только после этого можно взять обратные величины интегральных приоритетов альтернатив и нормализовать их. Результаты будут некорректными, если сначала вычислить обратные значения взвешенных оценок альтернатив по каждому критерию, а затем выполнить их сложение и нормализацию.

При построении сетевых структур для управляющих критериев весьма полезно сначала провести мозговой штурм и тщательно идентифицировать все компоненты и их элементы, характеризующие проблему принятия решений. Затем необходимо установить связи, указывающие направления влияния на множестве компонентов, для каждого управляющего критерия отдельно, отбрасывая компоненты, которые не имеют влияния по данному критерию. Рассматривая решения в свете отдельных управляющих критериев, мы можем работать с менее сложными структурами и, в конечном счете, сэкономить время.

В суперматрице учитываются как внешние, так и внутренние зависимости; внутренние зависимости приводят к появлению ненулевых матриц-блоков на главной диагонали суперматрицы. Столбцы каждого блока представляют собой собственные векторы соответствующих матриц парных сравнений. Все парные сравнения проводятся так, чтобы оценить степень влияния двух элементов, принадлежащих одному компоненту, на третий элемент того же компонента относительно управляющего критерия. Таким же способом проводятся парные сравнения компонентов сети по их взаимному влиянию друг на друга.

Мы используем два вида циклов, которые могут встречаться в некоторых узлах сети решений, один из которых соответствует влиянию элементов компонента только на самих себя, а второй — взаимному влиянию элементов в одном компоненте. Первый вид цикла мы называем циклом независимости, так как в иерархии он присутствует на самом нижнем уровне, и в суперматрице ему соответствует единичная матрица, расположенная в нижнем правом углу. Матрицу такого типа имеет компонент-сток, если между его элементами нет зависимостей. Второй вид цикла — это цикл зависимости, который показывает взаимные влияния между элементами одного компонента. Матрица, соответствующая такому циклу, строится из собственных векторов парных сравнений элементов данного компонента по степени воздействия на каждый элемент относительно управляющего критерия. При этом задают вопрос: какой из двух сравниваемых элементов сильнее влияет на третий элемент относительно управляющего критерия? Из сравнений выводятся собственные векторы в новой шкале отношений, которые записываются в столбцы диагональных блоков суперматрицы, соответствующих циклу.

Когда в сети отсутствуют обратные связи от компонента альтернатив к другим компонентам, то кластер альтернатив является узлом-стоком, в который потоки только входят, но ни один не выходит. При этом альтернативы представлены в суперматрице единичной матрицей на главной диагонали, если среди них нет взаимных зависимостей, или матрицей, отражающей зависимости между элементами этого компонента, если альтернативы взаимозависимы. Если компонент альтернатив является стоком, его можно исключить из суперматрицы. В этом случае из суперматрицы вычисляются предельные приоритеты критериев, а альтернативы оцениваются абсолютным способом. Обобщенные приоритеты альтернатив вычисляются путем умножения их оценок на предельные приоритеты критериев. Мы не будем рассматривать этот случай особо, так как он не вызывает каких-либо осложнений при обработке суперматрицы. В общем случае, включение альтернатив в суперматрицу необходимо тогда, когда в сети существуют связи, направленные от компонента альтернатив к другим компонентам.

Иногда для уменьшения количества парных сравнений, которые необходимо выполнить по критериям каждой управляющей иерархии, в некоторых приложениях МАС для быстрого предварительного анализа можно объединить все критерии управляющей иерархии в один критерий, например *Выгоды*, и сформировать суждения о взаимном влиянии элементов проблемы в свете получения *Выгод*. Также можно поступить с *Возможностями*, *Издержками* и *Рисками*. Это — компромиссный подход, компенсирующий некоторую потерю точности более высокой скоростью. Он проиллюстрирован примером маркетинга нового лекарственного средства, который приведен ниже. Другой способ, позволяющий облегчить анализ сложной проблемы, состоит в удалении из сети управляющих критериев с близкими к нулю значениями приоритетов и повторной нормализации приоритетов оставшихся критериев, для которых строятся сетевые структуры следующего уровня детализации.

5-2. Мультипликативный и аддитивный принцип формирования отношения Выгоды — Возможности — Издержки — Риски

Приоритеты альтернатив по выгодам, возможностям, издержкам и рискам объединяются в отношении

$$BOCR = (\text{Выгоды} \times \text{Возможности}) \,/\, (\text{Издержки} \times \text{Риски}),$$

традиционно применяемом в экономике при анализе «выгоды — издержки». Значения отношения *BOCR*, полученные для каждой альтернативы, нормируются и среди них выбирается максимум. Приведенная формула полезна тогда, когда значения приоритетов соизмеримы, т. е. имеют одинаковый порядок величин. Другими словами, бессмысленно делить тысячи долларов выгод на затраты, измеряемые в пенни, что почти эквивалентно делению на ноль. Кроме того, отметим, что в отношении *BOCR* не имеет смысла пользоваться весовыми коэффициентами, так как тогда все альтернативы будут умножаться на одно и то же число.

Существует другой, более надежный способ объединить выгоды, возможности, издержки и риски, который учитывает их приоритеты. Перечисленные четыре категории качества решения могут иметь различную важность для ЛПР. Мы можем определить приоритеты категорий и использовать их в качестве весовых коэффициентов для вычисления обобщенных приоритетов альтернатив, не забывая об инверсии значений приоритетов по издержкам и рискам. Данный метод обобщения согласуется с вычислением приоритетов на иерархиях и сетях. Заключительные приоритеты получаются в результате операций умножения и сложения. При этом приоритеты альтернатив не возводятся в степени, соответствующие приоритетам критериев, а умножаются на значения приоритетов. Результаты, полученные аддитивным и мультипликативным способом, достаточно часто, но не всегда являются близкими. Приведенные ниже примеры проиллюстрируют это. Мы предупреждаем читателя о том, что в некоторых случаях окончательные результаты могут не совпадать и достаточно сильно отличаться друг от друга. Если приоритеты *Выгод* (*B*), *Возможностей* (*O*), *Издержек* (*C*) и *Рисков* (*R*) обозначить как p_i, $i = 1, \dots, 4$, то, применяя разложение в ряд показательной и логарифмической функций, справедливое для значений переменной на интервале [0, 2], получим:

$$\exp\left(\log\frac{B^{p_1}O^{p_2}}{C^{p_3}R^{p_4}}\right) \approx 1+\log\left(\frac{B^{p_1}O^{p_2}}{C^{p_3}R^{p_4}}\right); \quad \log X \approx X-1; \quad \sum_{i=1}^{4} p_i = 1;$$

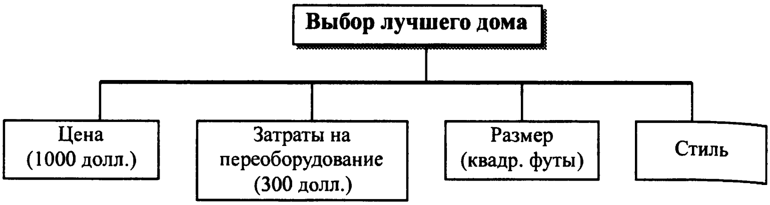
$$\exp\left(\log\frac{B^{p_1}O^{p_2}}{C^{p_3}R^{p_4}}\right) \approx 1+p_1\log(B)+p_2\log(O)-p_3\log(C)-p_4\log(R) \approx$$

$$\approx 1+p_1(B-1)+p_2(O-1)-p_3(C-1)-p_4(R-1) = p_1B+p_2O-p_3C-p_4R.$$

Заметим, что при использовании обратных значений издержек и рисков в виде

$$\frac{B^{p_1}O^{p_2}}{C^{p_3}R^{p_4}} \approx p_1B+p_2O+\frac{p_3}{C}+\frac{p_4}{R}$$

могут иметь место парадоксы. Так, если выгоды рассматриваемого решения высоки, а затраты очень высоки, то величина $1/C$ будет близка к нулю,



A	**200**	**150**	**3000**	*Колониальный*
B	**300**	**50**	**2000**	*Ранчо*
C	**500**	**100**	**5500**	*Многоуровневый*

Рис. 5-2 а. Оценки домов *А*, *В*, *С* по четырем критериям

при этом решение с очень высокими затратами будет оцениваться только с точки зрения его выгод, вопреки всем ожиданиям. Таким образом, мы больше не используем формулу с обратными значениями издержек и рисков, которую применяли прежде, чтобы уйти от отрицательных значений. Кроме того, для обобщения приоритетов альтернатив по выгодам, возможностям, издержкам и рискам иногда применяется формула остаточной вероятности:

$$p_1B + p_2O + p_3(1-C) + p_4(1-R) = p_1B + p_2O - p_3C - p_4R + (p_3 + p_4),$$

которая всегда дает положительный ответ. Здесь инверсия затрат и рисков выполняется с помощью вычитания из единицы, но в результате оказывается, что к приоритетам всех альтернатив добавляется константа $(p_3 + p_4)$.

Преимущество аддитивного способа композиции по сравнению с мультипликативным можно продемонстрировать на следующем примере. Предположим, что семья хочет купить дом, и есть три дома *А*, *В*, *С*, которые рассматриваются как альтернативы. В процессе анализа используются четыре фактора: *Стоимость дома*, *Затраты на переоборудование дома*, *Размер дома* и *Стиль дома*, причем последний является неизмеряемым критерием в отличие от остальных. Оценки альтернатив по критериям показаны на рис. 5-2 а.

Если сложить оценки по критериям *Стоимость* и *Затраты на переоборудование* и вычислить их нормированные значения, то получим следующие приоритеты альтернатив: *А* — 0.269, *В* — 0.269, *С* — 0.462. Теперь рассмотрим, что произойдет, если осуществить нормализацию в другом порядке. Сначала нормализуем оценки альтернатив для каждого из измеряемых факторов. Затем вычислим нормированные приоритеты критериев, измеренных в одной шкале, т. е. *Стоимости* и *Затрат на переоборудование*. Мы получим:

	Стоимость	***Затраты на переоборудование***
	w_1 **= 1000/1300 = 0.769**	w_2 **= 300/1300 = 0.231**
A	200/1000 = 0.2	150/300 = 0.5
B	300/1000 = 0.3	50/300 = 0.167
C	500/1000 = 0.5	100/300 = 0.333

Сумма нормированных значений для каждой альтернативы не совпадает с приведенными выше приоритетами *A, B, C*, если не умножена на весовые коэффициенты критериев *Стоимость* и *Затраты на переоборудование*. Следовательно, нужно объединить экономические факторы в один показатель, прежде чем перейти к вычислению обобщенной оценки по всем критериям с помощью операций сложения и умножения. Заметим, что мультипликативная свертка по двум стоимостным критериям с возведением приоритетов альтернатив в степени, соответствующие весам критериев, дает результат: *A* — 0.256, *B* — 0.272, *C* — 0.472, который не обеспечивает одинаковых значений для *A* и *B*, как это должно быть. Таким образом, мультипликативное взвешивание приводит к некорректным результатам.

Мы получили важный результат, который следует обобщить на МАИ/МАС в целом. Нормализация оценок альтернатив по факторам, имеющим стоимостное измерение, приводит к относительным оценкам важности критериев, которые совпадают с результатами аддитивной композиции нормированных оценок альтернатив. Например, в данном примере приоритет критерия *Стоимость* в среднем в три раза превышает приоритет *Затрат на переоборудование*. Поэтому при парном сравнении этих критериев относительно цели выбора разумно назначить оценку степени доминирования «Среднее» (*Стоимость* в 3 раза важнее, чем *Затраты на переоборудование*). Эти критерии можно объединить в один экономический критерий, если они имеют одинаковую важность. Однако может случиться так, что относительно критериев более высокого уровня иерархии

A	**350/1300 = 0.269**	**0.256**	**3000/10500**	*Колониальный*
B	**350/1300 = 0.269**	**0.272**	**2000/10500**	*Ранчо*
C	**600/300 = 0.462**	**0.472**	**5500/10500**	*Многоуровневый*

Рис. 5-2 b. Объединение двух стоимостных критериев аддитивным и мультипликативным способом функциональная важность этих показателей различна, поскольку возможность приобретения разных по величине денежных сумм, которые требуются в разное время, может существенно отличаться. На рис. 5-2 b показан результат объединения двух стоимостных критериев в один экономический критерий. В левом столбце приведены точные значения долларовых издержек на каждый дом *A, B, C*, полученные путем аддитивной композиции. Агрегируя два критерия, измеряемые в долларах, в один, затем можно принять решение о покупке дома, сравнивая значения экономического критерия со значениями двух других критериев и учитывая их относительную важность.

5-3. Решение конгресса США о торговом статусе Китая. Иерархический пример, иллюстрирующий структуру

Этот пример был выполнен совместно с моим студентом Еонмином Чо, а результаты были переданы некоторым конгрессменам до того, как законопроект по данному вопросу поступил в конгресс США для голосования. Мы анализировали решение о торговом статусе Китая, которое наилучшим образом будет отвечать интересам Соединенных Штатов. В процессе анализа использовались иерархии *Выгод, Возможностей, Издержек* и *Рисков*, которые обрабатывались методом анализа иерархий. В общей сложности в четырех иерархиях рассматривалось пятнадцать критериев и три альтернативы. Проведенный анализ чувствительности решений показал, что предоставление Китаю статуса *Постоянного торгового партнера* является наиболее предпочтительной альтернативой.

Начиная с 1986 года Китай пытается присоединяться к международной торговой системе, к Общему соглашению по тарифам и торговле (ОСТТ, GATT) и приемнику этой организации, ВТО (Всемирной торговой организации). Согласно правилам ВТО, объединяющей 135 государств, кандидат в члены этой организации должен установить торговые соглашения с любым членом ВТО, желающим вести с ним торговлю. Во время проведения данного исследования Китай имел двухсторонние торговые соглашения с 30 странами, включая США (ноябрь 1999 года), кроме того, еще 37 членов ВТО требовали заключения с ним соглашений. В переговорах, которые вел Китай с Соединенными Штатами, он попросил, чтобы США освободили Китай от ежегодного пересмотра его статуса *Торгового партнера* (ТП), который до 1998 года назывался статусом *Привилегированного государства*. В марте 2000 года президент Клинтон послал в конгресс законопроект, в котором предлагалось дать Китаю статус *Постоянного торгового партнера* (ПТП). Мы полагали, что решение конгресса США о торговом статусе Китая будет иметь как прямое, так и косвенное влияние на американские отношения с Китаем. Прямое воздействие будет выражаться в изменении экономических, военных и политических отношений между США и Китаем, так как торговые отношения выйдут на новый уровень. Косвенное влияние проявится тогда, когда Китай станет членом ВТО и будет твердо придерживаться правил и принципов этой организации. Китай обещал присоединиться к ВТО только в том случае, если США предоставят ему статус *Постоянного торгового партнера*.

Мы предположили, что конгресс может рассматривать четыре альтернативы. Наименее вероятная из них — та, что США откажет Китаю как в постоянном статусе (ПТП), так и в ежегодном продлении статуса ТП. Три других альтернативы — следующие:

- Принятие конгрессом законопроекта о постоянном торговом статусе (ПТП) Китая без каких-либо дополнительных условий. Эта альтернатива позволит с ноября 1999 года вести торговлю с Китаем по правилам ВТО. Китай также выполнит другие требования и торговые условия ВТО.
- Принятие поправок к существующему законопроекту о статусе ТП. Данная альтернатива поставит Китай в такое же положение, как другие страны, и отделит торговлю от других проблем. Вдобавок к этому могут быть приняты другие законы, касающиеся прав человека, прав рабочих, защиты окружающей среды и т. д.
- Ежегодное продление Китаю статуса ТП. Конгресс продлевает Китаю статус *Торгового партнера* еще на год и, таким образом, поддерживает статус-кво.

Было много дебатов, в которых звучали различные мнения по вопросу о том, должен ли конгресс предоставить Китаю статус ПТП. Сторонники нового законопроекта делали акценты на выгодах и возможностях (главным образом, экономических), которые могли быть получены в случае принятия закона о ПТП. Противники законопроекта говорили о высоких затратах и рисках, которые возможны в случае его принятия, в том числе о возможном уменьшении числа рабочих мест в США. Кроме того, предоставление Китаю статуса ПТП могло привести к росту его военных расходов и усилить угрозу для Тайваня.

Далее мы рассмотрим иерархии выгод, издержек, возможностей и рисков, которые возможны для США как последствия принятого решения.

Выгоды США

А. Увеличение американского экспорта в Китай

Постоянный торговый статус Китая позволит увеличить американский экспорт на 3.1 миллиардов долларов в год, который за короткий срок может возрасти на 12.7 миллиардов, достигнув 13.9 миллиардов долларов к 2005 году. Китай обещал снизить общую величину пошлин в среднем с 25 до 9 %. Американские фирмы будут иметь более широкий доступ на китайский рынок, особенно в сфере услуг, сельского хозяйства и в финансовом секторе. Например, в настоящее время (начало 2000 года) в Китае работают только 25 иностранных банков, которым разрешено принимать и предоставлять средства в китайской национальной валюте (ренминьби), и всего семь иностранных страховых компаний. Деятельность этих компаний разрешена только в нескольких городах, таких как Шанхай, Шаньцинь и Гуанчжоу. Территориальные ограничения будут сняты через пять лет. Иностранным банкам пока не позволено принимать вклады от китайских предприятий или граждан. Однако, как только Китай присоединится к ВТО, на финансовом рынке произойдут серьезные изменения. По правилам ВТО Китай должен будет разрешить работать иностранным банкам с китайскими предприятиями в ренминьби в течение двух лет, а с китайскими гражданами — в течение пяти лет.

B. Улучшение китайских законов

Изменение китайских законов должно уменьшить количество нарушений Китаем прав интеллектуальной собственности, являющихся источниками больших прибылей, и гарантировать защиту этих прав в будущем. Нарушения прав интеллектуальной собственности были причиной серьезных торговых разногласий между США и Китаем и нанесли солидный ущерб доходам американских компаний. Одно из наиболее важных различий между ВТО и его предшественником GATT состоит в том, что ВТО имеет дело не только с проблемами торговли, но также охватывает услуги и права интеллектуальной собственности в соответствии с положением «Аспекты прав интеллектуальной собственности, относящиеся к торговле». Все государства, являющиеся членами ВТО, обязаны соблюдать это положение. Кроме того, Китай согласился с требованием США, что при его вступлении в ВТО положение о защите прав интеллектуальной собственности начнет действовать сразу, без переходного периода. Следовательно, вступление Китая ВТО должно привести к росту прибыли американского бизнеса в сфере программного обеспечения, музыкальных записей и в других высоко технологичных отраслях промышленности и культуры.

Как только Китай присоединится к ВТО, он будет обязан привести свое законодательство в соответствие с принципами этой организации. В связи с этим Китай станет более законопослушным государством, а являющиеся следствием этого прозрачность и предсказуемость его действий приведут к улучшению инвестиционного климата в этой стране.

C. Обещание Китая выполнить условия США

Китай согласился соблюдать требования США, касающиеся защиты интересов американских производителей. Первое из этих требований заключается в том, что США будет поддерживать антидемпинговые меры в течение 15 лет после того, как Китай присоединится к ВТО. Если Международная торговая комиссия и Департамент торговли США установят наличие демпинга, а также то, что демпинговая практика иностранных экспортеров наносит вред внутренней промышленности, правительство может ввести антидемпинговые таможенные пошлины и тариф на импорт, равный границе демпинга. США применяют антидемпинговую политику гораздо шире, чем другие страны.

Второе требование связано со статьей 201 Закона о торговых операциях 1974 года, называемой «статьей спасения» или «гарантией защиты», которая предусматривает право президента строго ограничить импорт иностранных товаров на срок до пяти лет.

D. Увеличение занятости

Увеличение американского экспорта может привести к созданию дополнительных рабочих мест в США, особенно в тех секторах промышленности, где американские товары имеют высокую конкурентоспособность, например в сфере высоких технологий, телекоммуникаций и сельского хозяйства.

E. Выгоды от снижения расходов потребителей

Если США повысят тарифы на китайские товары вследствие торгового спора между двумя странами, американским потребителям придется платить более высокие цены за такие товары, как одежда, игрушки и электронные приборы. Это будет обременительно для семей с низкими доходами.

Издержки США

A. Потеря доступа на китайский рынок

За доступ на китайские рынки идет ожесточенная конкурентная борьба между многими государствами. Если Китай не получит статус ПТП, он, по всей вероятности, возложит ответственность за это на США, и тогда американскому бизнесу вряд ли будут предложены такие же возможности, как его конкурентам на китайских рынках.

B. Уменьшение количества рабочих мест в США

Профсоюзы выразили беспокойство, что в США может уменьшиться количество рабочих мест, если конгресс одобрит предложенный законопроект, так как некоторые американские компании могут переместить свои производства в Китай в погоне за дешевой рабочей силой.

Возможности для США

A. Американо-китайские отношения

Принятие законопроекта может привести к прорыву в американо-китайских отношениях во всех сферах: экономической, политической, социальной, культурной и военной. Конгресс США может помочь Китаю, который был изолирован до реформ Ден Сяопина, стать ближе к остальному миру и открыть новые области для сотрудничества между Китаем и США.

В. Улучшение экологической обстановки

Большое население Китая и быстрый экономический рост приводят к потреблению огромного количества энергии и истощению природных ресурсов, нанося вред окружающей среде. Есть две причины, по которым США могут ожидать улучшения экологической политики Китая, если он получит статус ПТП. Во-первых, многие развивающиеся страны, такие как Китай, не могут позволить себе приобрести экологически безопасное оборудование. Достигнув более высокого уровня экономического развития, Китай, вероятно, будет больше заботиться об охране окружающей среды. Во-вторых, как показал американо-китайский форум по охране и развитию окружающей среды, улучшение отношений между Китаем и США может оказать положительное влияние на политику Китая в области защиты окружающей среды.

С. Развитие демократии

Эта цель очевидна. США полагают, что они могут положительно повлиять на проблемы защиты прав человека и демократические нормы в китайском обществе.

D. Защита прав человека и трудящихся

Чем больше Китай будет открывать себя миру через потоки своих товаров, финансов, технологий и идей, тем более вероятно, что он станет демократическим государством, в котором права трудящихся и права человека приблизятся к стандартам, принятым в развитых странах.

Риски для США

А. Уменьшение влияния на китайскую политику

Некоторые политологи полагают, что ежегодный пересмотр торгового статуса Китая дает США экономические рычаги для воздействия на другие аспекты взаимоотношений с Китаем, такие как права человека, права трудящихся и проблемы безопасности. Поэтому предоставление Китаю статуса *Постоянного торгового партнера* воспринимается как уменьшение влияния на Китай.

В. Американо-китайский конфликт

Отказ Китаю в постоянном торговом статусе может привести к конфликтам между США и Китаем. Некоторые аналитики говорят, что Китай может стать главным соперником США, заменив бывший Советский Союз. Другими словами, потенциальные политические трения с Китаем весьма рискованны.

C. Нарушение стабильности в Южно-Азиатском регионе

Разрыв отношений с Китаем может стать причиной нестабильности в Южно-Азиатском регионе, особенно в Тайваньском проливе. Изоляция Китая от ВТО может привести к отказу Китая от своих обязательств смягчить потенциальный конфликт на Корейском полуострове, а также конфликт между Индией и Пакистаном.

D. Изменение политического курса Китая

Лидеры Китая, прежде всего премьер-министр Чжу Ронгджи, пытаются реформировать экономическую и политическую системы Китая. Если США не поддержат этих усилий, то реакционные силы Китая, включая функционеров коммунистической партии Китая и других привилегированных групп, будут оказывать давление на сегодняшних лидеров, чтобы уменьшить их желание преобразовать Китай.

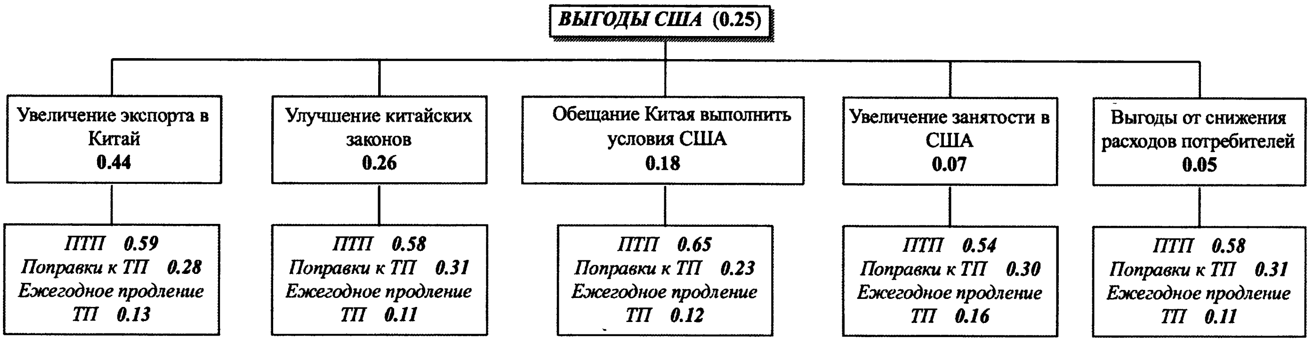
РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМЫ МЕТОДОМ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

Дискуссия двух стран и неизбежность принятия решения о торговом статусе Китая вдохновили нас на исследование данной проблемы с применением МАИ с целью выявления положительных и отрицательных аспектов возможных решений. Такой подход позволит нам выбрать наиболее перспективную из трех альтернатив.

МАИ требует соблюдения следующих принципов. Анализ должен быть всесторонним, что достигается идентификацией всех факторов рассматриваемой проблемы, относящихся к трем главным аспектам: экономике, политике и безопасности. Кроме того, исследование должно быть объективным, т. е. строго базироваться на критериях и приоритетах, которые будут рассматриваться в анализе решения.

Исследование включает четыре основных этапа. Первый этап — формирование структуры решения и выявление основных показателей его качества. Мы построили иерархии для выгод, возможностей, издержек и рисков и упорядочили приоритеты критериев в этих иерархиях. Иерархии приведены на рис. 5-3 a, b, там же показаны приоритеты критериев и приоритеты альтернатив по каждому критерию. Глобальные приоритеты альтернатив по каждой из категорий качества приведены под соответствующими иерархиями.

На следующем этапе методом парных сравнений были получены значения приоритетов критериев и альтернатив (см. рис. 5-3 a, b). Суждение о предпочтительности одного элемента по сравнению с другим выражалось оценкой интенсивности предпочтения, взятой из фундаментальной шкалы. Читатели, желающие восстановить наши оригинальные суждения, которые здесь не приводятся, могут вычислить отношения двух соответствующих приоритетов и затем взять ближайшее целое число или его обратную величину, если число меньше единицы.



Синтез приоритетов по ВЫГОДАМ : *ПТП* ***0.60*** *Поправки к ТП* ***0.28*** *Ежегодное продление ТП* ***0.12***

Синтез приоритетов по ИЗДЕРЖКАМ: *ПТП* ***0.18*** *Поправки к ТП* ***0.30*** *Ежегодное продление ТП* ***0.52***
Нормированные обратные значения: *ПТП* ***0.51*** *Поправки к ТП* ***0.31*** *Ежегодное продление ТП* ***0.18***

Рис. 5-3а. Иерархии выгод и издержек для примера о постоянном торговом статусе Китая

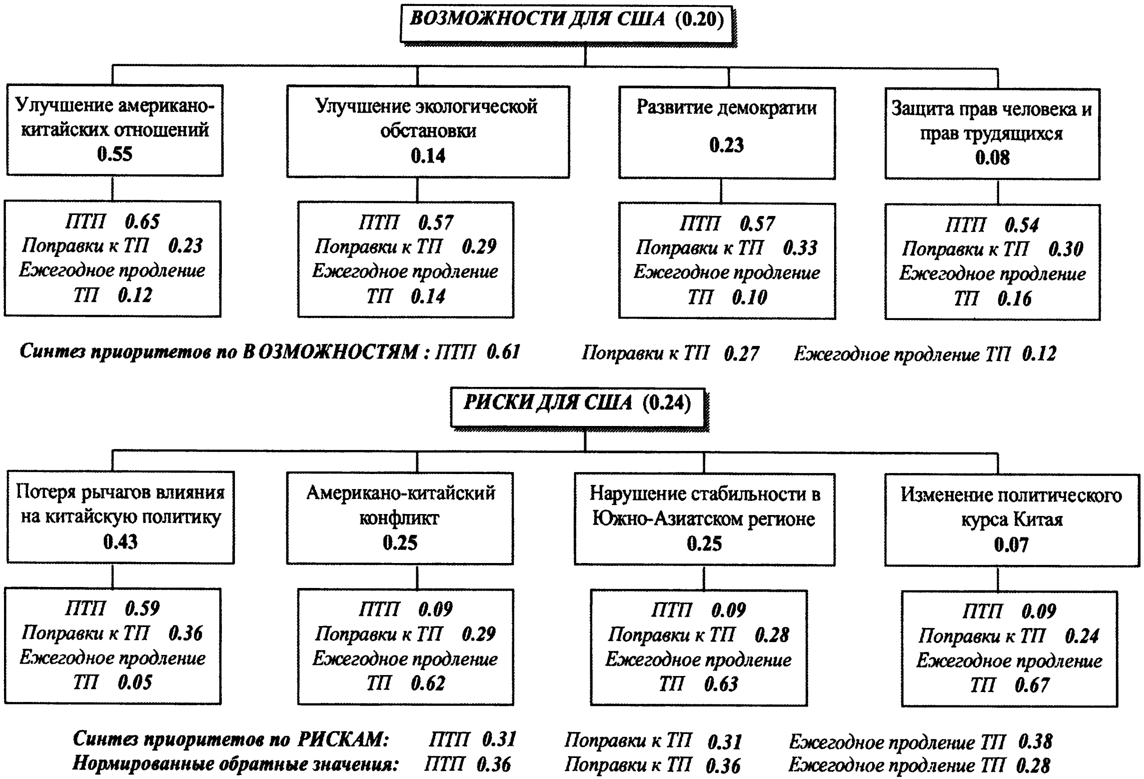


Рис. 5-3b. Иерархии возможностей и рисков для примера о постоянном торговом статусе Китая

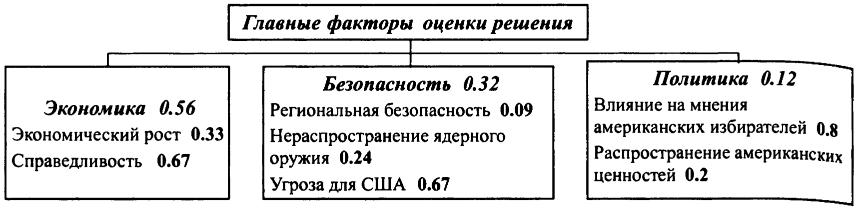


Рис. 5-4. Иерархия факторов для оценки *Выгод, Издержек, Возможностей и Рисков*

Третий этап включает построение иерархии факторов для оценки важности выгод, возможностей, издержек и рисков, которая приведена на рис. 5-4, установление приоритетов факторов *Экономика*, *Безопасность* и *Политика*, а также детализирующих их подфакторов, которые показаны в табл. 5-1.

На последнем этапе мы синтезировали глобальные приоритеты альтернатив, умножая приоритет каждой альтернативы на нормированные приоритеты остальных элементов в каждой иерархии и складывая их. Значения глобальных приоритетов приведены в нижней строке табл. 5-1. В процессе синтеза мы брали нормализованные обратные величины приоритетов альтернатив по издержкам и рискам. В заключительном ранжировании альтернатива ПТП является несомненным лидером. Значения приоритетов факторов, которые использовались для оценки выгод, возможностей, издержек и рисков, приведены на рис. 5-4.

Первичная цель любой экономической политики состоит в том, чтобы поощрять развитие экономики. Торговая политика всегда порождает «победителей» и «побежденных», поэтому необходимо принимать во внимание принципы справедливости. В связи с этим фактор *Экономика* детализируется подфакторами *Экономический рост* и *Справедливость*. Фактор *Безопасность* декомпозирован на три подфактора: *Региональная безопасность* (в Южно-Азиатском регионе, особенно в районе между Китаем и Тайванем); *Нераспространение ядерного оружия* с целью уменьшения ядерных и обычных вооружений; *Прямая угроза безопасности США*. Фактор *Политика* детализирован двумя подфакторами: *Воздействие на мнения американских избирателей* и *Распространение американских ценностей* (демократия, права человека и права трудящихся).

Результаты оценивания выгод, возможностей, издержек и рисков приведены в табл. 5-1, откуда видно, что выгоды и издержки имеют более высокие значения, чем возможности и риски, потому что по определению они (выгоды и издержки) представляют реальные и неизбежные последствия решения, в то время как возможности и риски соответствуют вероятным последствиям. Поскольку люди более чувствительны к отрицательным последствиям возможных решений, мы оценили важность издержек и рисков выше, чем важность выгод и возможностей.

Таблица 5-1

Оценка важности *Выгод, Издержек, Возможностей и Рисков*

Факторы	Подфакторы	*Выгоды*	*Издержки*	*Возможности*	*Риски*
Экономика (0.56)	Экономический рост (0.19)	Высокие	Очень низкие	Средние	Очень низкие
	Справедливость (0.37)	Средние	Высокие	Низкие	Низкие
Безопасность (0.32)	Региональная безопасность (0.03)	Низкие	Средние	Средние	Высокие
	Нераспространение ядерного оружия (0.08)	Средние	Средние	Высокие	Высокие
	Угроза для США (0.21)	Высокие	Очень высокие	Высокие	Очень высокие
Политика (0.12)	Воздействие на мнения избирателей (0.1)	Высокие	Очень высокие	Средние	Высокие
	Распространение американских ценностей (0.02)	Очень низкие	Низкие	Низкие	Средние
Обобщенные приоритеты		**0.25**	**0.31**	**0.20**	**0.24**

Приоритеты лингвистических оценок: очень высокие — 0.42; высокие — 0.26; средние — 0.16; низкие — 0.1; очень низкие — 0.06.

Теперь можно вычислить глобальные приоритеты трех рассматриваемых альтернатив решения о торговом статусе Китая. Рассмотрим четыре возможных способа обобщения приоритетов альтернатив по выгодам, возможностям, издержкам и рискам:

1. $F_{A_i}^{Mult} = \dfrac{(P_{A_i}^{B})^{w_B}(P_{A_i}^{O})^{w_O}}{(P_{A_i}^{C})^{w_C}(P_{A_i}^{R})^{w_R}}$;

2. $F_{A_i}^{Add} = w_B P_{A_i}^{B} + w_O P_{A_i}^{O} + w_C \big/ P_{A_i}^{C} + w_R \big/ P_{A_i}^{R}$;

3. $F_{A_i}^{Add1} = w_B P_{A_i}^{B} + w_O P_{A_i}^{O} + w_C(1 - P_{A_i}^{C}) + w_R(1 - P_{A_i}^{R})$;

4. $F_{A_i}^{Add2} = w_B P_{A_i}^{B} + w_O P_{A_i}^{O} - w_C P_{A_i}^{C} - w_R P_{A_i}^{R}$.

Неоднозначность подхода к обобщению приоритетов вызывает проблемы, связанные с интерпретацией получаемых значений, а также с выбором способа вычисления в конкретных ситуациях. Первая из приведенных формул выражает принцип «справедливого компромисса» между достоинствами и недостатками решения. Вторая формула представляет собой

Таблица 5-2

Синтез глобальных приоритетов альтернатив

Альтернативы	Выгоды (0.25)	Возможности (0.20)	Издержки (0.31)	Риски (0.24)	$F_{A_i}^{Add}$	$F_{A_i}^{Mult}$	$F_{A_i}^{Add1}$	$F_{A_i}^{Add2}$
ПТП	0.60	0.61	0.51	0.36	**0.51**	0.52	0.446	0.1418
Поправки к ТП	0.28	0.27	0.31	0.36	**0.31**	0.31	0.327	–0.0434
Ежегодное продление ТП	0.12	0.12	0.18	0.28	**0.18**	0.17	0.227	–0.1984

взвешенную сумму преимуществ решения, где минимальные значения недостатков рассматриваются как преимущества. Третья формула соответствует более оптимистическому подходу, в котором числа, полученные путем вычитания приоритетов издержек и рисков из единицы, интерпретируются как положительные оценки решения, свидетельствующие о том, что «не все плохо». Четвертый принцип основан на вычислении разности достоинств и недостатков, поэтому при его использовании могут получаться отрицательные значения, свидетельствующие о доминировании недостатков над достоинствами.

Результаты синтеза глобальных приоритетов альтернатив с использованием различных принципов обобщения показаны в табл. 5-2, откуда видно, что во всех случаях лучшим решением является принятие законопроекта о статусе ПТП для Китая.

Например, при аддитивном синтезе для альтернативы ПТП будем иметь: $0.6 \times 0.25 + 0.51 \times 0.31 + 0.61 \times 0.2 + 0.36 \times 0.24 = 0.51$.

При мультипликативном синтезе, который мы критиковали, но, тем не менее, хотели бы сравнить его результат с аддитивным, для альтернативы ПТП получим: $0.6^{0.25} \times 0.51^{0.31} \times 0.61^{0.2} \times 0.36^{0.24} = 0.506$. После нормализации путем деления на сумму значений всех альтернатив, полученных таким же образом, получим значение 0.52 для альтернативы ПТП. Интересно отметить, что при применении последней формулы, в которой используется разность, только одна альтернатива ПТП имеет положительный приоритет. Для остальных вариантов решения издержки и риски превышают выгоды и возможности, о чем свидетельствуют отрицательные значения глобальных приоритетов.

Устойчивость результатов при изменении приоритетов

Наш анализ показывает, что предоставление Китаю статуса *Постоянного торгового партнера* (ПТП) является лучшей альтернативой (0.51), за которой следует альтернатива, связанная с внесением поправок в закон о статусе ТП, направленных на улучшение торговых отношений с Китаем (0.31). Альтернатива статус-кво, т. е. ежегодное продление статуса ТП для Китая, является наименее благоприятным выбором (0.17).

Мы провели всесторонний анализ чувствительности решений, в процессе которого исследовали влияние возмущений приоритетов выгод, издержек, возможностей, и рисков на результат выбора, а также влияние совместных возмущений приоритетов критериев и альтернатив. Мы анализировали то, что происходит с результирующим ранжированием альтернатив при возмущениях приоритетов, т. е. в каких пределах изменения приоритетов лучшей альтернативой остается одна и та же. Полный анализ чувствительности требует слишком больших затрат времени, поэтому целесообразно провести усеченный анализ. Это можно сделать двумя способами. Первый способ основан на предположении, что приоритеты альтернатив по критериям адекватно отражают их объективные свойства и поэтому фиксируются при проведении анализа. Возмущениям подвергаются критерии, расположенные на более высоких уровнях иерархии. При этом мы применяем еще одно усечение, связанное с ограничением диапазона возмущений критериев, так как очень большие возмущения могут привести к изменению приоритетов в неразумных пределах, которые не поддаются интерпретации. Поэтому целесообразно взять полученные приоритеты и давать им небольшие приращения в сторону увеличения и уменьшения в различных комбинациях, следя за устойчивостью окончательного ранжирования альтернатив. Способ обоснования выбора лучшей альтернативы решения нужно найти, даже если невозможно исследовать устойчивость для всех комбинаций критериев. Для этого существуют различные средства. В данном примере мы сначала исследовали устойчивость результата, изменяя приоритеты критериев при фиксированных приоритетах выгод, издержек, возможностей и рисков. Затем мы анализировали чувствительность, фиксируя значения приоритетов альтернатив и критериев и давая приращения приоритетам выгод, издержек, возможностей и рисков. Эта работа дала следующие результаты.

При фиксированных приоритетах выгод, издержек, возможностей и рисков анализ чувствительности с применением программного обеспечения, разработанного фирмой *Expert Choice*, показал, что лучшая альтернатива нечувствительна к тринадцати из пятнадцати критериев, показанных на рис. 5-3 a, b. Только изменение двух критериев — *Уменьшение количества рабочих мест в США* и *Потеря рычагов влияния на китайскую политику*, как раздельное, так и совместное, — может сделать лучшую альтернативу менее желательной по сравнению с другими. Такое происходит, если важность первого из этих двух критериев увеличивается более чем вдвое по сравнению с установленным значением или если важность второго критерия увеличивается в несколько раз. В обоих этих случаях лучшей альтернативой становится *Ежегодное продление Китаю статуса ТП*.

В процессе анализа было выявлено множество парных комбинаций критериев, для которых одновременное изменение приоритетов приводит к инверсии результирующего порядка альтернатив. Однако инверсия наблюдается только тогда, когда приоритеты обоих критериев одновременно увеличиваются в два раза или более, что при существующих обстоятельствах является крайне маловероятным. Таким образом, проведенный анализ чувствительности позволяет сделать вывод о том, что заключительный результат, приведенный в табл. 5-2, является достаточно устойчивым.

Когда мы фиксировали приоритеты альтернатив и критериев, изменяя веса выгод, издержек, возможностей и рисков в обе стороны на 5 % во всех возможных комбинациях, мы установили, что приоритеты альтернатив остаются устойчивыми во всех случаях.

Проведенный анализ чувствительности свидетельствует о том, что решение о предоставлении Китаю постоянного торгового статуса полностью совпадает с интересами США.

5-4. Маркетинг лекарственных средств. Анализ выгод, издержек и рисков без управляющей иерархии*

Рассмотрим решение, которое должна принять большая фармацевтическая компания. Проблема состоит в том, каким образом следует вводить на рынок новое лекарственное средство, учитывая истекающий в скором времени срок патента на существующее лекарственное средство, которое она до этого распространяла? Рассмотрим методику применения МАС для решения этой задачи, которая иллюстрирует две важных идеи. Первая заключается в использовании простейшей управляющей иерархии, включающей 3 обобщенных критерия: *Выгоды, Издержки* и *Риски*. Как мы увидим в других примерах из этой главы, во многих проблемах принятия решений каждый из этих управляющих критериев может быть декомпозирован в иерархию из нескольких уровней (управляющую иерархию). Кроме того, управляющая структура может содержать обратные связи между ее элементами, т. е. быть не иерархией, а сетью, и в таком случае после вычисления предельных приоритетов следует осуществить синтез глобальных приоритетов альтернатив по управляющим критериям, принадлежащим разным управляющим структурам. В рассматриваемом примере для каждого из обобщенных критериев была построена сетевая модель взаимодействия рассматриваемых факторов, представленных компонентами, состоящими из элементов. Таким образом, мы рассматривали три сетевых модели, каждая из которых соответствовала одному управляющему критерию.

* Пример выполнен вместе с моими студентами Т. Бенедиктом и Ф. Мубареком.

Рассматриваемая проблема возникла в реальной практике одной из фармацевтических компаний, которая оказалась в следующей ситуации. Ожидая снятия с продажи существующего препарата, компания намеревалась представить на рынке новое лекарство до того, как закончится срок патента на старое средство. Компания должна была решить, стоит ли начинать продажу нового лекарственного средства, пока не сошло с прилавков старое. При этом возникли следующие вопросы: Следует ли сокращать продажу старого лекарственного средства постепенно или будет лучше заменить его новым сразу и полностью? Какую часть маркетингового бюджета выделить на реализацию каждой стратегии? Кроме этих, рассматривались и другие важные вопросы. Хотя у существующего лекарства появился мощный конкурент, его известность продолжает приносить прибыль. Химический состав нового лекарства улучшен по сравнению со старым, но для его успешного продвижения на рынок требуется большая работа. Также существует риск, что новое лекарственное средство не будет одобрено врачами и пациентами. Более того, с учетом затрат, требующихся на продвижение, и высокой конкуренции на рынке лекарств, компания может потерять часть прибыли, что повышает степень ответственности за это маркетинговое решение.

На первом этапе построения модели следовало определить заинтересованные стороны, или участников (акторов), к которым относятся: администраторы учреждений здравоохранения, врачи, фармацевты и медсестры. Беседы с этими специалистами облегчили идентификацию релевантных компонентов и элементов, а также выявление их взаимных зависимостей. Кроме того, общение со специалистами помогло получить ценную экспертную информацию для формирования суждений в нашей модели.

Вторым этапом была декомпозиция общей модели в соответствии с критериями управляющей иерархии. Это позволило аналитикам сосредоточиться на отдельных аспектах сложной проблемы. Например, при рассмотрении выгод отдельно от других аспектов решения были выделены следующие факторы влияния: *Администрация*, *Доля рынка* и *Уровень прибыли*. Их важность может изменяться для разных ЛПР, с помощью сетевой модели необходимо выявить зависимости и приоритеты этих факторов. При рассмотрении издержек были идентифицированы следующие факторы: *Маркетинговые издержки*, *Издержки производства* и *Потеря доли рынка*. Анализ рисков включал факторы: *Признание товара*, *Затоваривание*, *Истечение срока патента* и *Стимулирование продаж*.

На третьем этапе выполнялся синтез приоритетов на сетевой модели. Лучшей альтернативой оказалось компромиссное решение: ввести в продажу новое лекарство, одновременно продолжая продажу старого. При этом новый препарат будет требовать более высоких расходов на продвижение, но известность старого обеспечит нормальный уровень прибыли без чрезмерных усилий.

Таблица 5-3

Матрицы суждений для анализа ВЫГОД

ВЫГОДЫ	*ПОТРЕБИТЕЛИ*	*ВЫГОДЫ*	*ЛЕКАРСТВА*
ПОТРЕБИТЕЛИ	0	0	0.75
ВЫГОДЫ	0	0	0.25
ЛЕКАРСТВА	1	1	0

Старое лекарство	*Администрация*	*Доля рынка*	*Уровень прибыли*
Администрация	1	1/3	1/3
Доля рынка	3	1	1/2
Уровень прибыли	3	2	1

Старое лекарство	*Медсестры*	*Фармацевты*	*Врачи*
Медсестры	1	1/3	1/4
Фармацевты	3	1	1/2
Врачи	4	2	1

Новое лекарство	*Администрация*	*Доля рынка*	*Уровень прибыли*
Администрация	1	1/3	1
Доля рынка	3	1	3
Уровень прибыли	1	1/3	1

Новое лекарство	*Медсестры*	*Фармацевты*	*Врачи*
Медсестры	1	1/3	1/4
Фармацевты	3	1	1/3
Врачи	4	3	1

Администрация	*Старое лек-во*	*Новое лек-во*
Старое лекарство	1	1
Новое лекарство	1	1

Доля рынка	*Старое лек-во*	*Новое лек-во*
Старое лекарство	1	2
Новое лекарство	1/2	1

Уровень прибыли	*Старое лек-во*	*Новое лек-во*
Старое лекарство	1	3
Новое лекарство	1/3	1

Медсестры	*Старое лек-во*	*Новое лек-во*
Старое лекарство	1	1
Новое лекарство	1	1

Фармацевты	*Старое лек-во*	*Новое лек-во*
Старое лекарство	1	0.5
Новое лекарство	2	1

Врачи	*Старое лек-во*	*Новое лек-во*
Старое лекарство	1	0.5
Новое лекарство	2	1

Таблица 5-4

Суперматрицы для анализа ВЫГОД решения

Исходная суперматрица	*Старое лек-во*	*Новое лек-во*	*Администрация*	*Доля рынка*	*Уровень прибыли*	*Медсестры*	*Фармацевты*	*Врачи*
Старое лекарство	0		0.5	0.6667	0.7500	0.5000	0.3333	0.3333
Новое лекарство			0.5	0.3333	0.2500	0.5000	0.6667	0.6667
Администрация	0.1396	0.2000						
Доля рынка	0.3325	0.6001		0			0	
Уровень прибыли	0.5278	0.1999						
Медсестры	0.1220	0.1172						
Фармацевты	0.3196	0.2684		0			0	
Врачи	0.5584	0.6144						

Взвешенная суперматрица	*Старое лек-во*	*Новое лек-во*	*Администрация*	*Доля рынка*	*Уровень прибыли*	*Медсестры*	*Фармацевты*	*Врачи*
Старое лекарство	0		0.5	0.6667	0.75	0.5	0.3333	0.3333
Новое лекарство			0.5	0.3333	0.25	0.5	0.6667	0.6667
Администрация	0.0349	0.05						
Доля рынка	0.0831	0.15		0			0	
Уровень прибыли	0.132	0.05						
Медсестры	0.0915	0.0879						
Фармацевты	0.2397	0.2013		0			0	
Врачи	0.4188	0.4608						

Окончание таблицы 5-4

Предельная суперматрица	*Старое лек-во*	*Новое лек-во*	*Администрация*	*Доля рынка*	*Уровень прибыли*	*Медсестры*	*Фармацевты*	*Врачи*
Старое лекарство	0.21575	0.21575	0.21575	0.21575	0.21575	0.21575	0.21575	0.21575
Новое лекарство	0.28425	0.28425	0.28425	0.28425	0.28425	0.28425	0.28425	0.28425
Администрация	0.02175	0.02175	0.02175	0.02175	0.02175	0.02175	0.02175	0.02175
Доля рынка	0.06055	0.06055	0.06055	0.06055	0.06055	0.06055	0.06055	0.06055
Уровень прибыли	0.04270	0.04270	0.04270	0.04270	0.04270	0.04270	0.04270	0.04270
Медсестры	0.04475	0.04475	0.04475	0.04475	0.04475	0.04475	0.04475	0.04475
Фармацевты	0.10895	0.10895	0.10895	0.10895	0.10895	0.10895	0.10895	0.10895
Врачи	0.22135	0.22135	0.22135	0.22135	0.22135	0.22135	0.22135	0.22135

Предельная суперматрица имеет одинаковые столбцы, каждый из которых показывает предельные приоритеты воздействия рассматриваемых элементов на *ВЫГОДЫ* решения. Нас интересуют, прежде всего, приоритеты альтернатив, которые после нормирования будут равны: *Старое лекарство* — 0.4315; *Новое лекарство* — 0.5685.

Таблица 5-5

Суперматрицы для анализа *ИЗДЕРЖЕК* решения

Исходная суперматрица	*Потеря доли рынка*	*Маркетинговые издержки*	*Издержки производства*	*Старое лекарство*	*Новое лекарство*
Потеря доли рынка				0.5815	0.3108
Маркетинговые издержки		0		0.1094	0.4934
Издержки производства				0.3091	0.1958
Старое лекарство	0.8	0.25	0.8	0	
Новое лекарство	0.2	0.75	0.2		

Взвешенная суперматрица	*Потеря доли рынка*	*Маркетинговые издержки*	*Издержки производства*	*Старое лекарство*	*Новое лекарство*
Потеря доли рынка				0.5815	0.3108
Маркетинговые издержки		0		0.1094	0.4934
Издержки производства				0.3091	0.1958
Старое лекарство	0.8	0.25	0.8	0	
Новое лекарство	0.2	0.75	0.2		

Предельная суперматрица	*Потеря доли рынка*	*Маркетинговые издержки*	*Издержки производства*	*Старое лекарство*	*Новое лекарство*
Потеря доли рынка	0.24615	0.24615	0.24615	0.24615	0.24615
Маркетинговые издержки	0.11805	0.11805	0.11805	0.11805	0.11805
Издержки производства	0.13585	0.13585	0.13585	0.13585	0.13585
Старое лекарство	0.33510	0.33510	0.33510	0.33510	0.33510
Новое лекарство	0.16490	0.16490	0.16490	0.16490	0.16490

Нормированные значения приоритетов альтернатив по *ИЗДЕРЖКАМ* равны: *Старое лекарство* — 0.6702; *Новое лекарство* — 0.3298.

Таблица 5-6

Суперматрицы для анализа РИСКОВ решения

Исходная суперматрица	*Новое лекарство*	*Старое лекарство*	*Стимулирование продаж*	*Истечение срока патента*	*Затованивание*	*Признание товара*
Новое лекарство		0	0.8	0.1667	0.8	0.8333
Старое лекарство			0.2	0.8333	0.2	0.1667
Стимулирование продаж	0.1659	0.1318	0	0	0.5	0.5
Истечение срока патента	0.0716	0.5897	0	0	0	0
Затоваривание	0.5186	0.1392	0.6667	0	0	0.5
Признание товара	0.2439	0.1392	0.3333	0	0.5	0

Взвешенная суперматрица	*Новое лекарство*	*Старое лекарство*	*Стимулирование продаж*	*Истечение срока патента*	*Затованивание*	*Признание товара*
Новое лекарство		0	0.2	0.1667	0.2000	0.2083
Старое лекарство			0.05	0.8333	0.0500	0.0417
Стимулирование продаж	0.1659	0.1318	0	0.0000	0.3750	0.3750
Истечение срока патента	0.0716	0.5898	0	0.0000	0.0000	0.0000
Затоваривание	0.5186	0.1392	0.5	0.0000	0.0000	0.3750
Признание товара	0.2439	0.1392	0.25	0.0000	0.3750	0.0000

Окончание таблицы 5-6

Предельная суперматрица	*Новое лекарство*	*Старое лекарство*	*Стимулирование продаж*	*Истечение срока патента*	*Затованивание*	*Признание товара*
Новое лекарство	0.1525	0.1525	0.1525	0.1525	0.1525	0.1525
Старое лекарство	0.0837	0.0837	0.0837	0.0837	0.0837	0.0837
Стимулирование продаж	0.2183	0.2183	0.2183	0.2183	0.2183	0.2183
Истечение срока патента	0.0603	0.0603	0.0603	0.0603	0.0603	0.0603
Затоваривание	0.2777	0.2777	0.2777	0.2777	0.2777	0.2777
Признание товара	0.2075	0.2075	0.2075	0.2075	0.2075	0.2075

Нормированные значения приоритетов альтернатив относительно *РИСКОВ* равны: *Старое лекарство* — 0.3542; *Новое лекарство* — 0.6456.

Таблица 5-7

Оценка *ВЫГОД, ИЗДЕРЖЕК* и *РИСКОВ* по управляющим критериям

	Прибыль (0.419)	**Прогресс (0.263)**	**Запрет контролирующими органами (0.160)**	**Конкурентоспособность (0.097)**	**Психологическое воздействие (0.062)**	***Приоритеты***
ВЫГОДЫ	Высокие	Средние	Низкие	Средние	Низкие	**0.353**
ИЗДЕРЖКИ	Средние	Высокие	Высокие	Средние	Высокие	**0.412**
РИСКИ	Низкие	Средние	Высокие	Низкие	Низкие	**0.235**

Приоритеты лингвистических оценок: Высокие — 0.517; Средние — 0.359; Низкие — 0.124.

Рис. 5-5. Сетевая модель *ВЫГОД* для задачи о маркетинге лекарственных средств

Таблица 5-8

Синтез заключительных приоритетов альтернатив

	ВЫГОДЫ (0.353)	ИЗДЕРЖКИ (обратные) (0.412)	РИСКИ (обратные) (0.235)	Аддитивный результат	Мультипликативный результат
Старое лекарство	0.4315	0.3298	0.6456	**0.4399**	0.438
Новое лекарство	0.5685	0.6702	0.3544	**0.5601**	0.562

Именно это решение было принято фармацевтической компанией. При этом она ликвидировала коммерческие стимулы и расходы на рекламу старого лекарства и увеличила аналогичные затраты на новый препарат. Такое решение согласуется с результатами, полученными на сетевой модели. Ниже приведены матрицы суждений (табл. 5-3) только для сети выгод, которая показана на рис. 5-5, а в табл. 5-4–5-6 представлены суперматрицы для выгод, издержек и рисков. В табл. 5-7 показаны оценки качества решения по всем критериям, а в табл. 5-8 — результаты заключительного ранжирования альтернатив.

5-5. Где хранить ядерные отходы

С 1991 года в Соединенных Штатах накопилось 123.5 миллионов кубометров радиоактивных отходов. Несмотря на то что производство таких отходов в последнее время уменьшилось, прежде всего из-за непредвиденных затрат в ядерной энергетике, повлиявших на стоимость электроэнергии, остается актуальной проблема: что делать с существующими отходами, которые будут представлять опасность в течение многих лет (от 200 000 до 1 600 000)? Где хранить ядерные отходы?

До 70-х годов XX века выбор мест хранения ядерных отходов был бессистемным из-за отсутствия государственного регулирования в этой области и из-за недостаточно полных знаний об опасности радиации. В 70-х годах правительство США стало заниматься этим вопросом. В 1982 году появился законодательный «Акт о политике ядерных отходов», в соответствии с которым Министерство энергетики должно было внедрить постоянно действующую систему геологического оборудования для хранения высокоактивных ядерных отходов. Ориентируясь на положения этого акта, мы провели исследование, целью которого был выбор наиболее приемлемого места в США для хранения существующих и будущих ядерных отходов с высокой интенсивностью радиации.

Для решения этой проблемы мы применили подход, основанный на моделях *Выгод, Издержек* и *Рисков*. Каждая модель содержит иерархию управляющих критериев. Для *Выгод* и *Издержек* использовались экономические, экологические и социальные критерии. В модель *Рисков* включены социально-экологические, экономические и политические критерии.

Под *Выгодами* подразумеваются преимущества от хранения ядерных отходов на определенной территории. Выгоды, получаемые от производства ядерной энергии или ядерного оружия, которые создают отходы, не рассматривались. Модель основана на предположении, что США имеют значительное количество ядерных отходов, в связи с чем необходимо найти место для их надежного хранения. *Издержки* включают затраты, необходимые для хранения ядерных отходов, такие как перевозка и возможная стоимость земли. Модель *Рисков* учитывает возможные последствия решений.

В задаче рассматривались шесть альтернатив, которые означали определенные территории, где можно было бы хранить высокорадиоактивные ядерные отходы (ВРЯО). Среди них — ядерное хранилище Хэнфорд в штате Вашингтон; резервация племени Мескалер Апачи в штате Нью Мексико; дно океана; космос; строящийся опытный центр захоронения ядерных отходов (ОЦЗЯО) в штате Нью Мексико; гора Юкка в штате Невада. Предварительный анализ показал, что эти шесть территорий являются реальными альтернативами для постоянного размещения хранилищ ВРЯО. Хотя конгресс официально обозначил в качестве такой территории гору Юкка, исследования Министерства энергетики еще не закончены, поэтому предпочтительность этой альтернативы пока неочевидна. Остальные территории рассматриваются как возможные места размещения.

Для каждого управляющего критерия мы строили сетевые модели, которые включали компоненты, влияющие на выбор места хранения ВРЯО. Такими компонентами являются *Альтернативы, Правительство, Другие участники, Законы и инструкции, Характеристики территории, Стоимость ресурсов, Социальные издержки, Прочие выгоды, Прочие затраты* и *Прочие риски*.

Большая часть компонентов присутствует во всех сетевых моделях, но некоторые принадлежат только определенным сетям. Компоненты и элементы, участвующие в управляющих иерархиях, перечислены в табл. 5-9, а характеристики их взаимосвязей — в табл. 5-10. Все элементы компонента *Альтернативы* входят в каждую сетевую модель. Компоненты *Правительство* и *Другие участники* также присутствуют во всех сетях, но с разными наборами элементов. Некоторые компоненты и элементы являются специфическими и принадлежат только одной сети, например *Прочие выгоды* в сети экономических и социальных выгод или *Стоимость ресурсов* в сети экономических выгод.

На рис. 5-10 связи между элементами указывают потоки влияния. Чтобы упорядочить наши размышления об этих потоках, мы можем ориентировать связи либо в направлении элементов, подверженных влиянию других элементов, либо указывать направление от элементов, оказывающих влияние. В данном примере мы применяем первый способ. Связь между двумя компонентами означает наличие связей между всеми элементами в этих компонентах. В строках табл. 5-10 показаны элементы, подверженные влиянию элементов, записанных в левом столбце.

На рис. 5-7–5-9 показаны сетевые модели выгод, затрат и рисков, откуда видно, что сети различаются для управляющих критериев одной и той же иерархии. Этот факт говорит о важности управляющих иерархий в МАС. Присутствие компонента *Альтернативы* во всех сетях обусловлено спецификой задачи принятия решений, однако совсем необязательно, чтобы альтернативы были связаны со всеми элементами проблемы.

Суждения о силе взаимного влияния элементов проблемы формировались с использованием процедуры парного сравнения. Например, на рис. 5-10 показаны потоки влияния между элементами двух компонентов, представляющих собой фрагмент сети, построенной для социально-экологического критерия в управляющей иерархии рисков. Чтобы выявить силу относительного влияния элементов компонента *Характеристики территорий* на элементы компонента *Альтернативы*, нужно было ответить на вопрос: какая из двух территорий является более опасной по уровню существующего загрязнения относительно социально-экологического критерия и насколько более опасной? Обратные связи от *Альтернатив* к *Характеристикам территорий* на рис. 5-10 соответствуют влияниям, суждения о которых формировались по ответам на вопрос: для данной альтернативы, например горы Юкка, что вызывает бо́льший риск (в смысле социально-экологического критерия) — существующий уровень загрязнения или близость к местам проживания людей, и насколько этот риск больше?

Для всех управляющих иерархий выгод, издержек и рисков были заполнены матрицы парных сравнений. В иерархии выгод, например, в процессе выявления суждений задавались вопросы: какой из двух управляющих критериев вносит больший вклад в выгоды (которые можно получить от выбора лучшего места) и насколько более важный?

Таблица 5-9

Принадлежность компонентов и элементов к сетям, соответствующим критериям управляющих иерархий

Компонент	Элемент	*Выгоды*			*Издержки*			*Риски*		
		Экологич.	*Экономич.*	*Социальн.*	*Экологич.*	*Экономич.*	*Социальн.*	*Соц.-экол.*	*Экономич.*	*Политич.*
Правительство (П)	1. Конгресс.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	2. Правительство США.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	3. Правительство штата.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	4. Министерство энергетики.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	5. Комиссия по ядерной регламентации США.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	6. Управление здоровья и профессиональной безопасности.		x	x	x	x	x	x	x	x
	7. Международная торговая палата.				x	x	x	x		
	8. Федеральная комиссия по энергетике США.				x	x	x	x	x	x
	9. Управление по охране окружающей среды	x	x	x	x	x	x	x		
Законы и инструкции (З)	1. Земля.	x								
	2. Вода.	x						x		
	3. Воздух.	x								
	4. Радиоактивное излучение.							x	x	x
	5. Охрана труда.		x							
	6. Охрана окружающей среды.		x						x	x
	7. Настоящие.				x	x	x			x
	8. Будущие						x			
Характеристики территорий (ХТ)	1. Уровень загрязнения.	x						x	x	
	2. Доступность.	x			x				x	x
	3. Размер/емкость.				x				x	
	4. Флора и фауна.	x			x			x		
	5. Уровень технологии.				x				x	
	6. Близость к местам проживания людей.							x		x
	7. Безопасность.							x		x
	8. Метод транспортировки.									
	9. Собственность на землю.							x	x	
	10. Время на подготовку								x	x
Альтернативы (А)	1. Хэнфорд.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	2. Мескалер Апачи.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	3. Дно океана.									
	4. Космос.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	5. ОЦЗЯО.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	6. Гора Юкка	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Окончание таблицы 5-9

Компонент	Элемент	*Выгоды*			*Издержки*			*Риски*		
		Экологич.	*Экономич.*	*Социальн.*	*Экологич.*	*Экономич.*	*Социальн.*	*Соц.-экол.*	*Экономич.*	*Политич*
Другие участники (У)	1. Защитники природы.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	2. Ученые.	x	x	x				x	x	x
	3. Общественные организации.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	4. Промышленность по переработке ВРЯО.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	5. Производители отходов.	x	x	x	x	x	x	x	x	x
	6. Американские аборигены.	x	x	x	x	x	x		x	x
	7. Обслуживающий персонал	x	x	x		x		x		x
Прочие выгоды (ПВ)	1. Доходы.		x							
	2. Развитие отрасли.		x							
	3. Освоение мест хранения ВРЯО		x							
	4. Налоги.		x							
	5. Централизованное управление.		x							
	6. Производительность.		x							
	7. Нераспространение ядерного оружия.									
	8. Контроль радиоактивного излучения.			x						
	9. Самодостаточность.			x						
	10. Уровень технологии.									
	11. Перспективы на будущее			x						
Стоимость ресурсов (СР)	1. Подготовительные работы.					x				
	2. Правовые нормы.					x				
	3. Разработка.					x				
	4. Земля.					x				
	5. Транспортировка.					x				
	6. Безопасность					x				
Прочие затраты (ПЗ)	1. Подготовка общественного мнения.					x				
	2. Налоги					x				
Социальные издержки (СИ)	1. Снижение престижа территории.						x			
	2. Отсутствие общественной поддержки.						x			
	3. Потеря рабочих мест.						x			
	4. Действие радиации.						x			
	5. Будущие поколения.						x			
	6. Снижение деловой активности						x			
Прочие риски (ПР)	1. Взрыв.							x		
	2. Загрязнение подземных вод.							x		
	3. Радиоактивное излучение.							x		
	4. Землетрясение.							x		
	5. Распространение ядерного оружия.									x
	6. Недоверие к властям.									x
	7. Угроза суверенитету									x

Таблица 5-10

Взаимное влияние элементов и компонентов

Компоненты/Элементы, оказывающие влияние	Компоненты/Элементы, подверженные влиянию								
	Выгоды экологические			***Издержки экологические***			***Риски социально-экологические***		
Правительство (П)	***З***	***А***	***У***	***П***	***З***	***А***	***П***	***З***	***ХТ***
1. Конгресс.	все	все	4, 5	все кроме 1		все	все кроме 1	все	
2. Правительство США.	все	все	4, 5	все кроме 2		все	все кроме 2	все	
3. Правительство штата.	все	все	4, 5	все кроме 3		все	все кроме 3	все	
4. Министерство энергетики.	все	все	4, 5	все кроме 4		все	все кроме 4	все	
5. Комиссия по ядерной регламентации.	все	все	4, 5	все кроме 5		все	все кроме 5	все	
6. Управление здоровья и профессиональной безопасности.	все	все	4, 5	все кроме 6		все	все кроме 6	все	
7. Международная торговая палата.	все	все	4, 5	все кроме 7		все	все кроме 7	7	
8. Федеральная комиссия по энергетике.	все	все	4, 5	все кроме 8			все кроме 8		все
9. Управление по охране окружающей среды	все	все	4, 5	все кроме 9		все	все кроме 9	все	
Законы и инструкции (З)	***ХТ***			***ХТ***	***У***		***П***	***ХТ***	
1. Земля.	все								
2. Вода.	все						все	1,4,6	
3. Воздух.	все								
4. Радиоактивное излучение.							все	1,4,6	
5. Охрана труда.									
6. Охрана окружающей среды.									
7. Настоящие.				все	3, 4, 5				
8. Будущие									
Характеристики территорий (ХТ)	***А***	***У***		***А***			***У***	***А***	
1. Уровень загрязнения.	все						7	все	
2. Доступность.	все			все					
3. Размер/емкость.				все					
4. Флора и фауна.	все	все		все				все	
5. Уровень технологии.				все					
6. Близость к местам проживания людей.								все	
7. Безопасность.								все	
8. Метод транспортировки.								все	
9. Собственность на землю.									
10. Время подготовки									

Продолжение таблицы 5-10

Компоненты/Элементы, оказывающие влияние	Компоненты/Элементы, подверженные влиянию							
	Выгоды экологические			***Издержки экологические***		***Риски социально-экологические***		
Альтернативы (А)	***П***	***А***	***У***	***ХТ***		***ХТ***		
1. Хэнфорд.				все		все		
2. Мескалер Апачи.				все		все		
3. Дно океана.				все		все		
4. Космос.				все		все		
5. ОЦЗЯО.				все		все		
6. Гора Юкка				все		все		
Другие участники (У)	***П***	***З***	***А, У***	***П***	***А***	***П***	***ХТ***	***У***
1. Защитники природы.	все	все	все	все		все		
2. Ученые.	все		все			все		
3. Общественные организации.	все		все	все		все		
4. Промышленность по переработке ВРЯО.	все		все	все		все		3, 7
5. Производители отходов.	все		все	все				
6. Американские аборигены.	все		все	все	все			
7. Обслуживающий персонал	все		все					
Прочие выгоды (ПВ)								
1. Доходы. 2. Развитие отрасли. 3. Освоение мест хранения ВРЯО. 4. Налоги. 5. Централизованное управление. 6. Производительность. 7. Нераспространение ядерного оружия. 8. Контроль радиоактивного излучения. 9. Самодостаточность. 10. Уровень технологий. 11. Перспективы на будущее	Рассматривается только для критериев экономических и социальных выгод							
Стоимость ресурсов (СР)								
1. Подготовительные работы. 2. Правовые нормы. 3. Разработка. 4. Земля. 5. Транспортировка. 6. Безопасность				Рассматривается только для экономических издержек				

Окончание таблицы 5-10

Компоненты/Элементы, оказывающие влияние	Компоненты/Элементы, подверженные влиянию: *Выгоды экологические*	*Издержки экологические*	*Риски социально-экологические*	
Прочие затраты (ПЗ)				
1. Подготовка общественного мнения. 2. Налоги		Рассматривается только для экономических издержек		
Социальные издержки (СИ)				
1. Снижение престижа территории. 2. Отсутствие поддержки. 3. Потеря рабочих мест. 4. Действие радиации. 5. Будущие поколения. 6. Снижение деловой активности .		Рассматривается только для социальных издержек		
Прочие риски (ПР)			*У*	*А*
1. Взрыв.			3, 7	все
2. Загрязнение подземных вод.				все кроме 5
3. Радиоактивное излучение.			3, 7	все
4. Землетрясение.			3, 7	все кроме 5
5. Распространение ядерного оружия.			3, 7	
6. Недоверие к властям.				
7. Угроза суверенитету				

Вычисленные из суперматрицы предельные приоритеты критериев использовались для взвешивания альтернатив (в тех случаях, когда последние не включались в суперматрицу). Синтез глобальных приоритетов альтернатив осуществлялся путем их нормирования отдельно по выгодам, издержкам и рискам, с последующим умножением на веса управляющих критериев соответствующей иерархии и сверткой по каждой из трех иерархий.

В табл. 5-11–5-13 приведена информация, необходимая для синтеза глобальных приоритетов (табл. 5-14), значения которых свидетельствуют о том, что Опытный центр по захоронению ядерных отходов (ОЦЗЯО) в штате Нью Мексико является лучшей альтернативой. Этот выбор объясняется, прежде всего, тем, что ОЦЗЯО уже оборудован необходимыми средствами и готов принять ВРЯО, как только будут решены некоторые законодательно-правовые вопросы. Эта альтернатива имеет невысокие *Экологические издержки* и *Политические риски* на уровне управляющих сетей. Однако она имеет средние показатели по критериям *ВЫГОД*. При выборе, основанном на отношении выгод к издержкам, лучшей является эта же

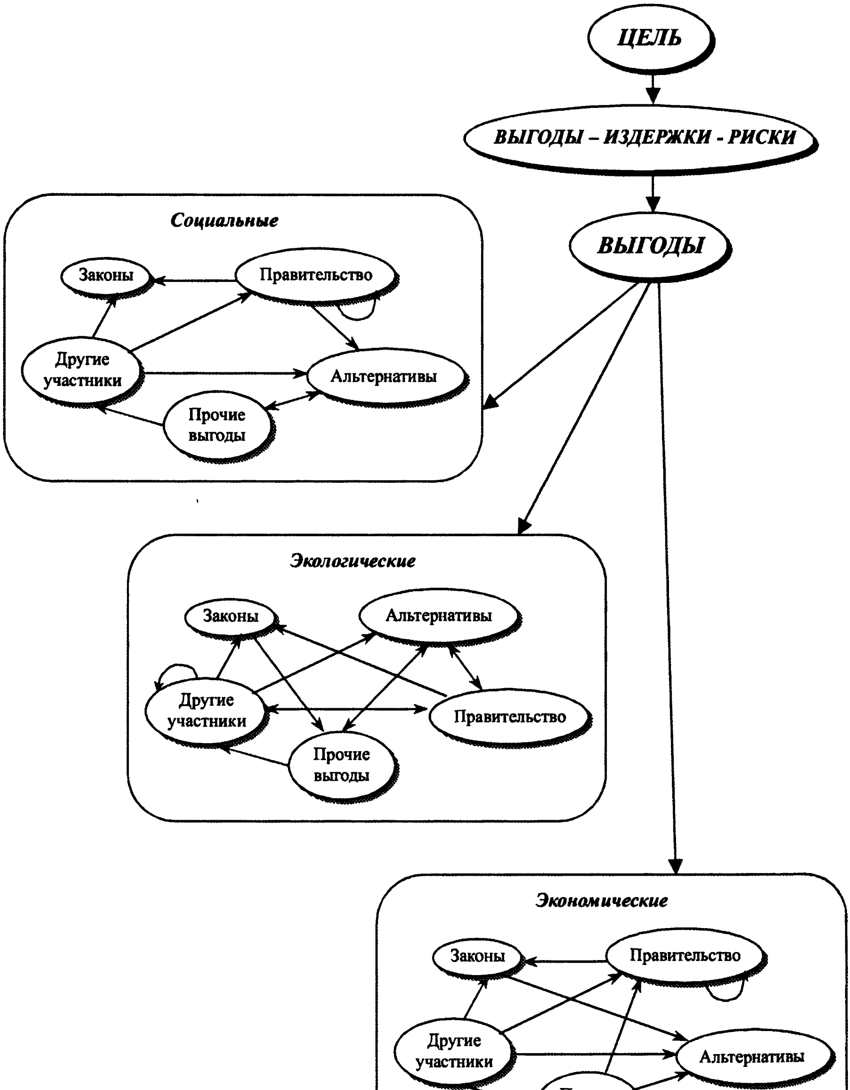


Рис. 5-7. Управляющая иерархия *ВЫГОД*

альтернатива, а в ранжировании остальных альтернатив наблюдаются небольшие различия. Этот факт объясняется высокими показателями риска для всех альтернатив, вследствие чего они становятся неразличимыми по данному фактору.

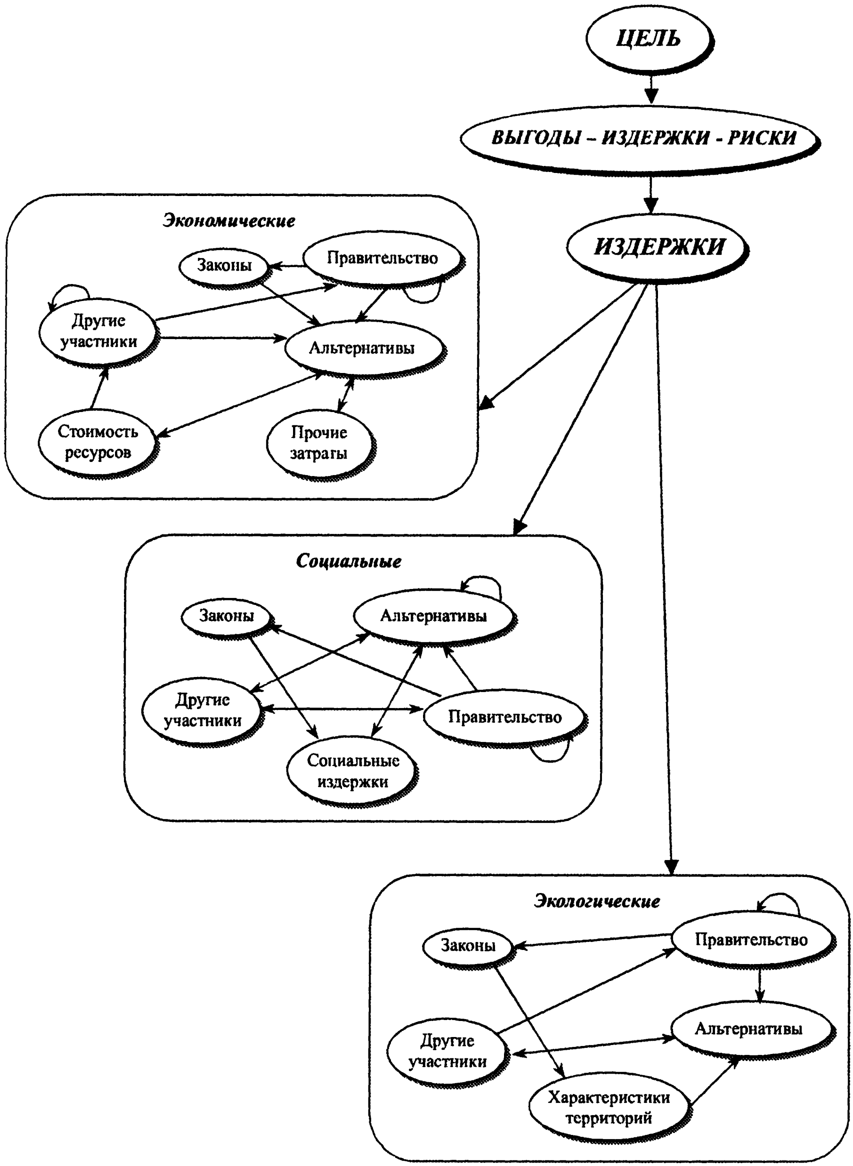


Рис. 5-8. Управляющая иерархия *ИЗДЕРЖЕК*

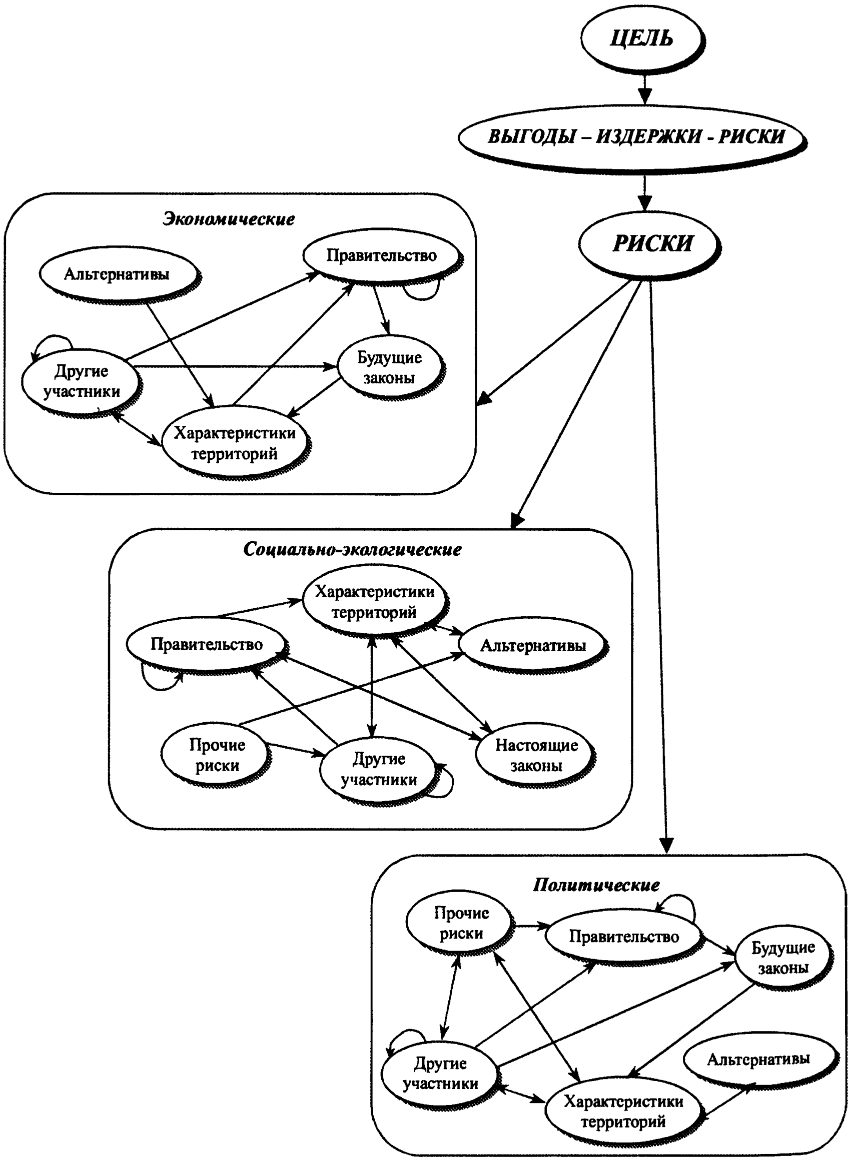


Рис. 5-9. Управляющая иерархия *РИСКОВ*

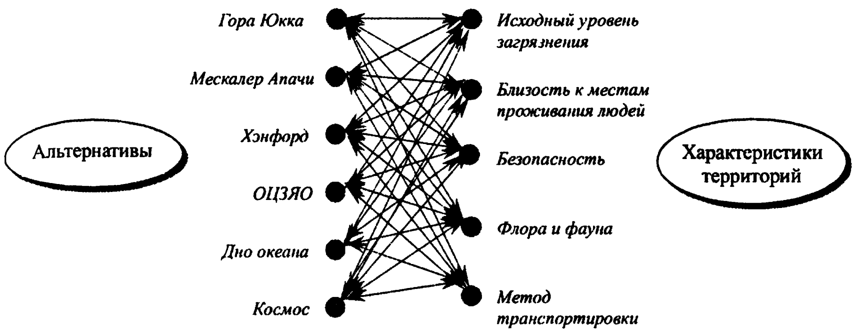


Рис. 5-10. Потоки влияния между элементами двух компонентов в сети, расположенной под критерием *Социально-экологические риски* в управляющей иерархии *РИСКОВ*

Таблица 5-11

Приоритеты альтернатив по критериям управляющих иерархий

ВЫГОДЫ	Экономические 0.0719	Экологические 0.6491	Социальные 0.279
Хэнфорд	0.1541	0.0734	0.1109
Мескалер Апачи	0.066	0.2020	0.1671
Дно океана	0.08	0.0642	0.0911
Космос	0.0465	0.261	0.3074
ОЦЗЯО	0.3528	0.1842	0.1511
Гора Юкка	0.3006	0.2151	0.1726

ИЗДЕРЖКИ	Экономические 0.126	Экологические 0.4579	Социальные 0.4161
Хэнфорд	0.2048	0.1740	0.0523
Мескалер Апачи	0.0656	0.0900	0.2691
Дно океана	0.2791	0.3828	0.1119
Космос	0.2846	0.1438	0.2483
ОЦЗЯО	0.1066	0.0734	0.0835
Гора Юкка	0.0592	0.1360	0.2349

Окончание таблицы 5-11

РИСКИ	**Экономические 0.0643**	**Политические 0.237**	**Социально-экологические 0.6986**
Хэнфорд	0.3663	0.0738	0.0957
Мескалер Апачи	0.1390	0.0695	0.1092
Дно океана	0.0923	0.3373	0.2278
Космос	0.1913	0.3155	0.1904
ОЦЗЯО	0.0875	0.1403	0.2065
Гора Юкка	0.1235	0.0637	0.1804

В табл. 5-12 приведены обобщенные приоритеты альтернатив по выгодам, издержкам и рискам, а в табл. 5-13 — результаты оценки выгод, издержек и рисков по независимым показателям, полученные с использованием лингвистических стандартов.

Рассмотренная модель характеризуется неопределенностью, связанной со степенью надежности данных, на базе которых формировались суждения. Несмотря на то что ученые предсказывают улучшение геологических условий в будущем, многие эксперты оспаривают использованную при этом методологию прогнозирования и утверждают, что уровень значимости подобных прогнозов становится недопустимо низким, если срок прогнозирования превышает 10000 лет. Поэтому степень нашей уверенности в безопасности выбранной территории не может быть выше меры нашего доверия к прогнозам, на которые мы опирались, и к методологии, применяемой для их получения. Этот пример был сделан вместе с К. Друел, Дж. Флауэрс, С. Линч, В. Марсенэл и В. Зисковским из университета Питтсбурга.

Таблица 5-12

Обобщенные приоритеты альтернатив по Выгодам, Издержкам и Рискам

	ВЫГОДЫ	***ИЗДЕРЖКИ***	***РИСКИ***
Хэнфорд	0.0897	0.1272	0.1009
Мескалер Апачи	0.1825	0.1615	0.1017
Дно океана	0.0728	0.2570	0.2450
Космос	0.2585	0.2050	0.2201
ОЦЗЯО	0.1871	0.0818	0.1832
Гора Юкка	0.2094	0.1675	0.1491

Таблица 5-13

Определение приоритетов Выгод, Издержек и Рисков

Обобщенный результат	Безопасность (0.377)	Загрязнение (0.062)	Перспективы на будущее (0.043)	Доступность (0.252)	Политические аспекты (0.106)	Бюджетные ограничения (0.160)	Приоритеты
ВЫГОДЫ	*Высокий*	*Низкий*	*Низкий*	*Низкий*	*Низкий*	*Низкий*	0.259
ИЗДЕРЖКИ	*Высокий*	*Высокий*	*Низкий*	*Высокий*	*Высокий*	*Высокий*	0.444
РИСКИ	*Высокий*	*Средний*	*Высокий*	*Низкий*	*Низкий*	*Низкий*	0.298

Высокий — 0.517. *Средний* — 0.359. *Низкий* — 0.124.

Таблица 5-14

Глобальные приоритеты альтернатив

	ВЫГОДЫ 0.259	ИЗДЕРЖКИ 0.444 (обратные)	РИСКИ 0.298 (обратные)	Результат (аддитивный)	Результат (мультипликативный)
Хэнфорд	0.0897	0.1917	0.2445	**0.1812**	0.176
Мескалер Апачи	0.1825	0.1510	0.2426	**0.1866**	0.190
Дно океана	0.0728	0.0949	0.1007	**0.0910**	0.094
Космос	0.2585	0.1189	0.1121	**0.1532**	0.149
ОЦЗЯО	0.1871	0.2980	0.1347	**0.2209**	0.217
Гора Юкка	0.2094	0.1456	0.1655	**0.1682**	0.173

5-6. Решение о противоракетной обороне США — развернутый пример

Введение

Правительство Соединенных Штатов должно принять судьбоносное решение, связанное с одобрением или отклонением программы национальной противоракетной обороны (ПРО)*. Многие эксперты в области политики, безопасности и науки высказывают различные мнения по этому поводу. Наиболее важный аргумент сторонников ПРО заключается в том, что такая система будет защищать США от потенциальных угроз со стороны таких стран, как Северная Корея, Иран и Ирак. Согласно данным ЦРУ, испытания северокорейских ракет дальнего действия прошли успешно, и там разрабатываются ракеты следующего поколения, которые смогут достигать территории США. Иран также провел испытания своей ракеты среднего радиуса действия Шахаб-3 в июле 2000 года.

Противники ПРО выражают сомнения, связанные с технической выполнимостью этого проекта, а также с высокой стоимостью (оцениваемой в 60 миллиардов долларов), политической напряженностью, усилением гонки вооружений и обострением международных отношений.

Существующая программа ПРО берет начало от Стратегических защитных инициатив (СЗИ) президента Рейгана, выдвинутых в 80-х годах XX века. План СЗИ ориентирован на разработку технологий для уничтожения запущенных ракет. С тех пор каждые несколько лет в этот план вносились существенные изменения. Начиная с 1993 года Администрация президента Клинтона активизирует исследования в области развития ПРО. Стратегия, названная «3 + 3», представляет собой план, по которому 3 года отводится на подготовку и разработку системы ПРО, и последующие 3 года — на ее развертывание.

Споры вокруг проекта ПРО усилились с появлением Закона о ПРО, который был представлен сенатором Сэмом Нунном 25 июня 1996 года. Законопроект требовал, чтобы конгресс США принял решение о развертывании системы ПРО к 2000 году и ориентировал Соединенные Штаты быть готовыми к развертыванию ПРО к концу 2003 года.

В 1997 году Комиссия Сената США по вооружениям одобрила Закон о ПРО, который набрал 10 голосов из 18. Этот закон санкционировал развертывание локальной противоракетной системы, включающей 100 ракет-перехватчиков земного базирования, плюс наземные радары и космические системы наблюдения. Ученые предупредили США о сократившемся

* Этот пример рассматривался в октябре 2000 года.

времени на предупреждение о запуске межконтинентальных баллистических ракет (МБР).

Однако анализ возможностей развертывания системы ПРО к 2003 году, проведенный независимой комиссией по оценке угрозы США от баллистических ракет, показал, что развертывание ПРО связано с большими рисками и может закончиться неудачей. Эти выводы заставили Администрацию скорректировать программу и перенести развертывание системы ПРО на 2005 год.

Развертывание системы ПРО зависит не только от технологического прогресса. Этот вопрос — один из самых актуальных в международной политике. Соглашение по антибаллистическим ракетам (АБР), подписанное США и бывшим Советским Союзом в 1972 году, запрещает создание ПРО, поэтому следующему президенту США придется убедить президента России Путина, выступающего против плана ПРО, изменить существующее соглашение или заключить новое. Какой будет реакция Китая и НАТО — это еще одна проблема, которую должен будет решить преемник президента Клинтона. Материал, который мы использовали для анализа данной проблемы, был собран моими студентами Еонмином Чо, Иоуксу Тжадером и Риной Викандари из разных источников экспертной информации.

Сетевая модель задачи

Проблема ПРО рассматривалась в октябре 2000 года, при этом главной целью исследования был обоснованный выбор лучшего решения о судьбе системы ПРО. На основе изучения опубликованных материалов, касающихся данной проблемы, и личного взаимодействия со специалистами были идентифицированы следующие альтернативы и критерии для оценки качества решения.

Альтернативы:

- Разработка и развертывание системы ПРО в соответствии с существующей программой.
- Глобальная защита. Внесение поправок в соглашение по АБР с целью ужесточения ограничений на их использование с применением всех возможных дипломатических, политических и экономических средств, а также осуществление совместного международного проекта создания системы глобальной противоракетной защиты.
- Продолжение исследований по ПРО. Эта альтернатива ориентирована не на развертывание системы ПРО, а на продолжение исследований в области развития противоракетной обороны.
- Закрытие программы ПРО. Сворачивание всех исследований и планов развертывания ПРО.

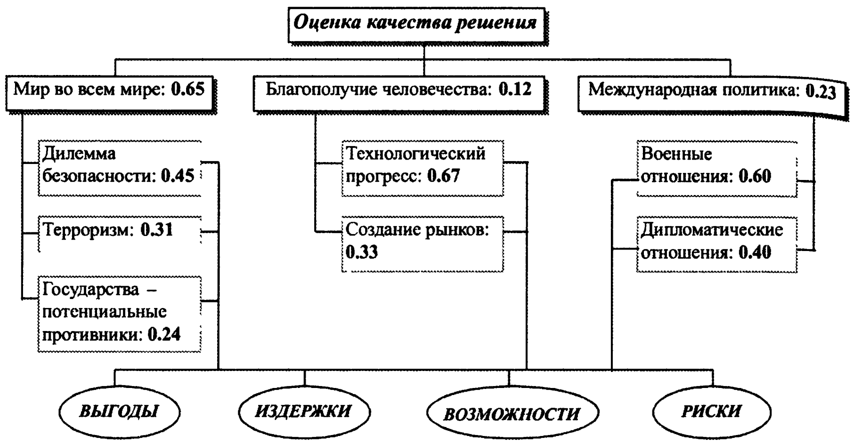


Рис. 5-11. Иерархия для оценки *Выгод, Издержек, Возможностей* и *Рисков*

Критерии для оценивания альтернатив были сгруппированы в категории *Выгод, Издержек, Возможностей* и *Рисков*. Рассматриваемая проблема принятия решения была представлена трехуровневой сетевой моделью, которая обрабатывалась с применением программного обеспечения для MAC *SuperDecisions*. На верхнем уровне модели расположена управляющая иерархия для оценивания важности четырех категорий качества решения: *Выгод*, *Издержек*, *Возможностей* и *Рисков* (рис. 5-11). Каждая из этих категорий связана с подчиненной ей сетью решений (сеть выгод, сеть издержек, сеть возможностей и сеть рисков).

Вычисление весов выгод, издержек, возможностей и рисков

Решение о разработке и внедрении системы ПРО рассматривалось в свете трех следующих критериев оценки выгод, возможностей, издержек и рисков. Это — *Мир во всем мире*, *Благополучие человечества* и *Международная политика*. Каждый из критериев имеет подкритерии, показанные на рис. 5-11. Подкритерии *Дилемма безопасности*, *Терроризм* и *Государства — потенциальные противники* охватывают большую часть причин нарушения стабильности и мира между государствами. Подкритерий *Дилемма безопасности* имеет следующий контекст: увеличение безопасности одной страны неизбежно приводит к уменьшению безопасности других стран. Если США развернут систему ПРО, то безопасность остальных стран уменьшится по сравнению с существующим уровнем.

Подкритерии второго критерия (*Благополучие человечества*) — *Технологический прогресс* и *Создание рынков*. Первый из них, обусловленный исследованиями в области ПРО, может принести человечеству ощутимые выгоды, связанные с освоением космоса, что может привести к созданию

Таблица 5-15

Вычисление приоритетов
ВЫГОД, ИЗДЕРЖЕК, ВОЗМОЖНОСТЕЙ и РИСКОВ

		ВЫГОДЫ	***ИЗДЕРЖКИ***	***ВОЗМОЖНОСТИ***	***РИСКИ***
Мир во всем мире	*Дилемма безопасности*	Очень низкие	Очень высокие	Очень низкие	Очень низкие
	Терроризм	Средние	Высокие	Очень низкие	Высокие
	Государства — потенциальные противники	Очень высокие	Высокие	Средние	Очень низкие
Благополучие человечества	*Технологический прогресс*	Высокие	Низкие	Высокие	Очень низкие
	Создание новых рынков	Средние	Очень низкие	Высокие	Очень низкие
Международная политика	*Военные отношения*	Высокие	Средние	Высокие	Очень низкие
	Дипломатические отношения	Низкие	Низкие	Низкие	Очень высокие
	Приоритеты	**0.264**	**0.361**	**0.186**	**0.190**

новых рынков. Двадцать первый век уже назвали постиндустриальной эрой. Развитие транспорта и телекоммуникаций принесет выгоды не только этим отраслям бизнеса, но и потребителям.

Подкритерии критерия *Международная политика* затрагивают военные и дипломатические отношения между государствами, которые могут измениться в случае принятия решения о развертывании системы ПРО.

Выгоды, издержки, возможности и риски рассматриваемого решения оценивались по сформулированным критериям с использованием метода лингвистических стандартов. Результаты оценивания приведены в табл. 5-15.

В табл. 5-16 приведены критерии и подкритерии, которые детализируют выгоды, возможности, издержки и риски, а также приоритеты этих критериев.

Приоритеты критериев и подкритериев были определены из матриц парных сравнений. Среди 23 рассматриваемых критериев сумма приоритетов девяти из них составляет 77 % от суммы всех приоритетов. Этими критериями являются: угроза безопасности, продажа вооружений, техническая неудача, военная мощь, технологический прогресс, вложенные

Таблица 5-16

Приоритеты компонентов и элементов проблемы

	Компоненты	Элементы	Локальный приоритет	Глобальный приоритет
ВЫГОДЫ (0.267)	**Экономические** (0.157)	Экономика государства	0.141	0.006
		Оборонная промышленность	0.859	0.036
	Политические (0.074)	Переговоры	0.859	0.017
		Военное лидерство США	0.141	0.003
	Безопасность (0.481)	Сдерживание	0.267	0.034
		Военная мощь	0.59	**0.076**
		Борьба с терроризмом	0.143	0.018
	Технологические (0.288)	Технологический прогресс	0.834	**0.064**
		Лидерство в области технологий	0.166	0.013
ВОЗМОЖНОСТИ (0.182)	Продажа вооружений		0.52	**0.094**
	Побочные эффекты		0.326	**0.059**
	Освоение космоса		0.051	0.009
	Защита союзников		0.103	0.019
ИЗДЕРЖКИ (0.361)	**Безопасность** (0.687)	Угроза безопасности	1.000	**0.248**
	Экономические (0.228)	Вложенные средства	0.539	**0.044**
		Будущие капиталовложения	0.461	**0.038**
	Политические (0.085)	Договор по АБР	0.589	0.018
		Международные отношения	0.411	0.013
РИСКИ (0.19)	Техническая неудача		0.430	**0.082**
	Гонка вооружений		0.268	**0.051**
	Усиление терроризма		0.052	0.01
	Ущерб окружающей среде		0.08	0.015
	Репутация США		0.17	0.032

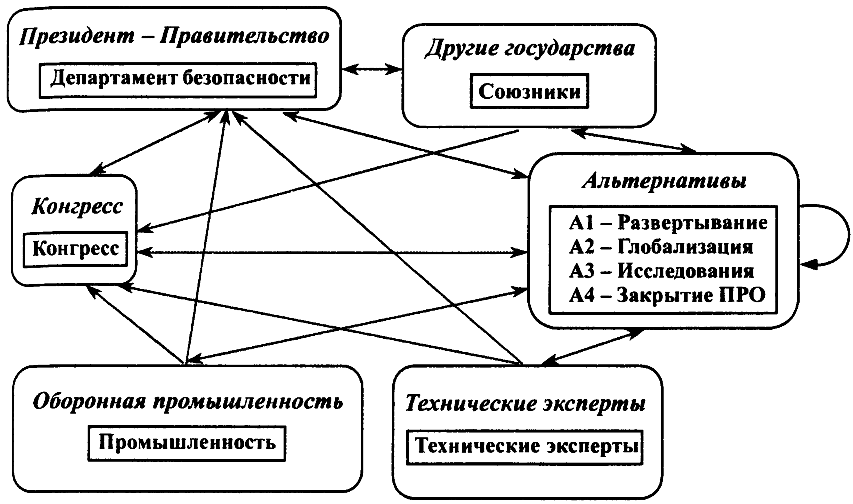


Рис. 5-12. Сетевая структура, определяющая критерий *Военная мощь* в иерархии выгод

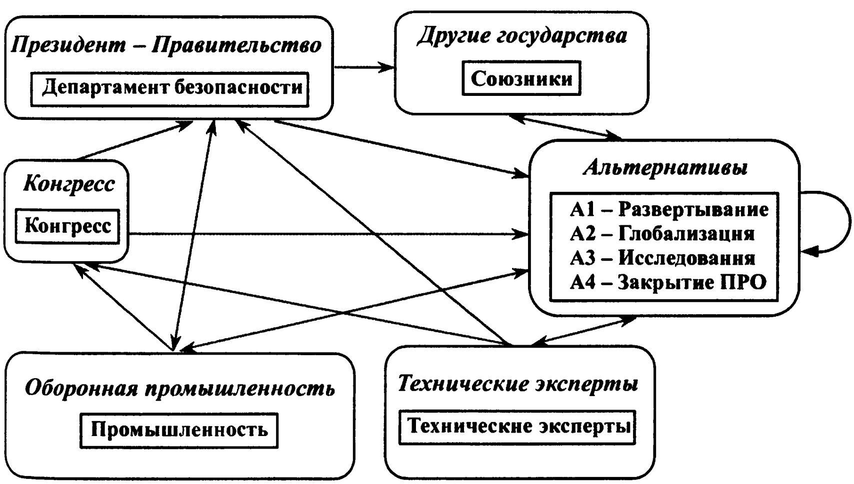


Рис. 5-13. Сеть под критерием *Технологический прогресс* в иерархии выгод

средства, побочные эффекты, гонка вооружений и будущие капиталовложения. В дальнейшем анализе мы будем использовать только эти важнейшие критерии. Мы проведем повторное нормирование приоритетов этих критериев по соответствующим категориям качества и продолжим анализ. На рис. 5-12–5-20 показаны сетевые структуры, построенные для каждого критерия.

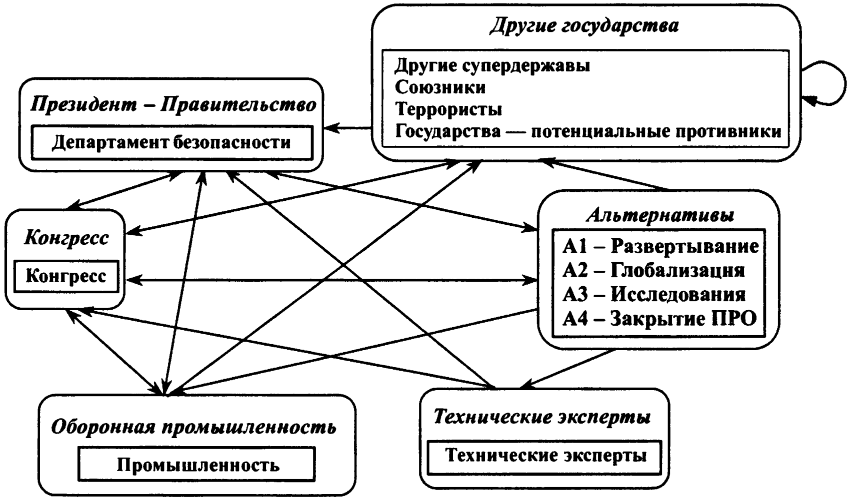


Рис. 5-14. Сетевая структура, определяющая критерий *Продажа вооружений* в иерархии возможностей

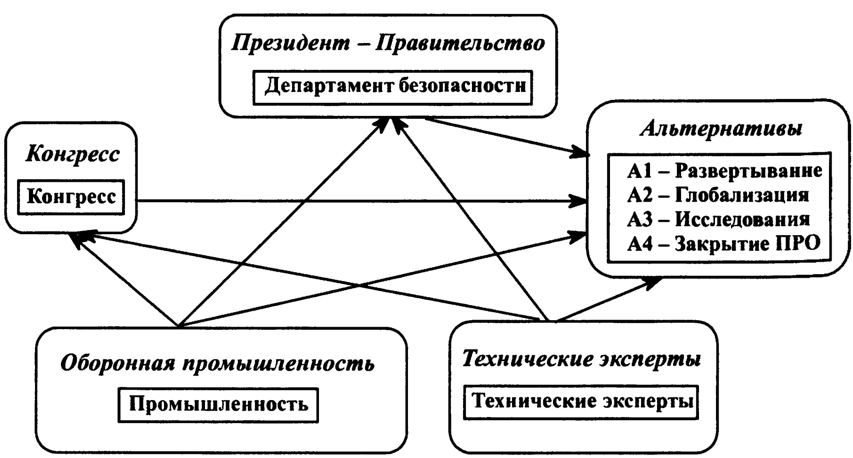


Рис. 5-15. Сеть под критерием *Побочные эффекты* в иерархии возможностей

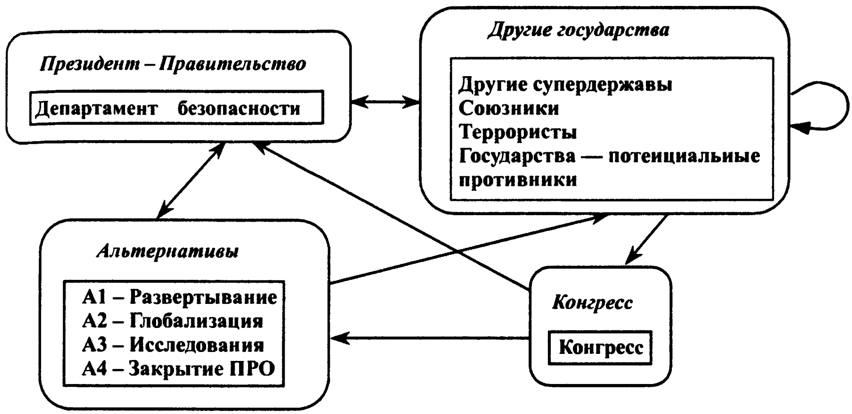


Рис. 5-16. Сеть для критерия
Угроза безопасности в иерархии издержек

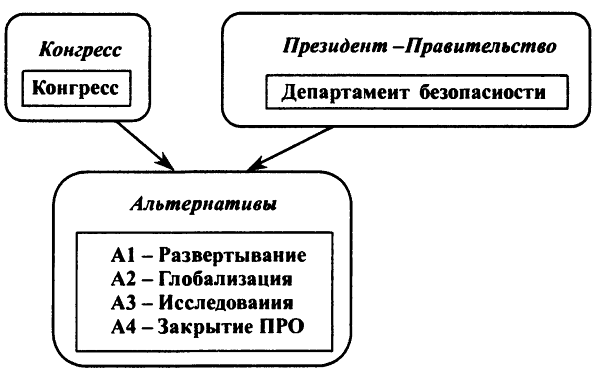


Рис. 5-17. Сеть для критерия
Вложенные средства в иерархии издержек

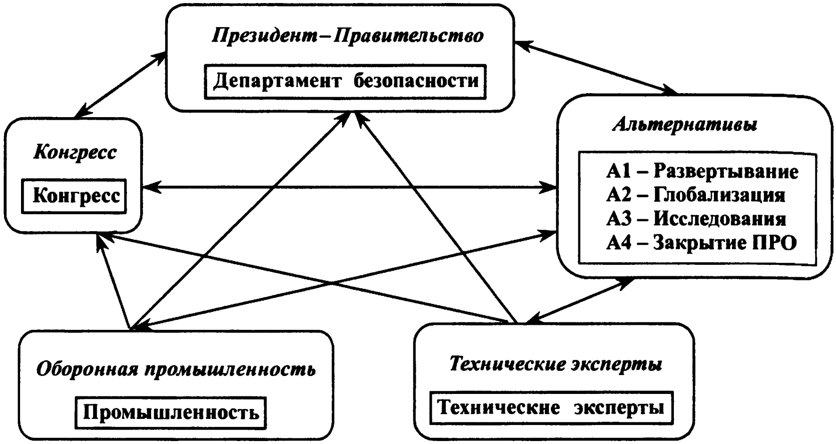


Рис. 5-18. Сетевая структура под критерием
Будущие капиталовложения в иерархии издержек

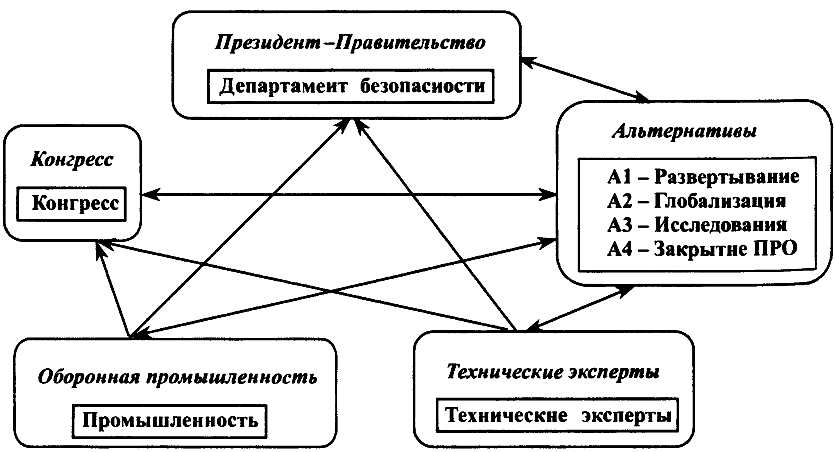


Рис. 5-19. Сеть для критерия
Техническая неудача в иерархии рисков

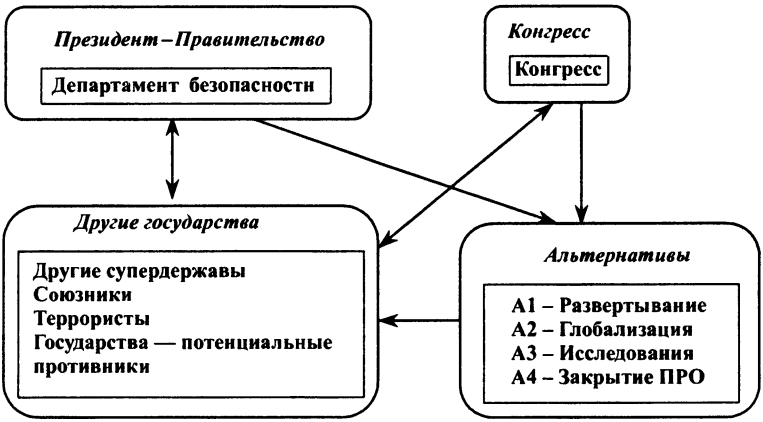


Рис. 5-20. Сетевая структура для критерия *Гонка вооружений* в иерархии рисков

Обработка сетевых структур

Анализ сетевых структур и процедуры их обработки рассмотрим на примере сети, определяющей критерий *Военная мощь*, которая представлена на рис. 5-12. В этой сети присутствуют два главных ЛПР — *Конгресс* и представители исполнительной власти в лице *Президента* и *Департамента безопасности*. На ЛПР оказывают влияние мнения технических экспертов, а также представителей оборонной промышленности.

Конгресс, *Президент*, *Оборонная промышленность* и *Технические эксперты* определяют меры, направленные на поддержание *Военной мощи* Соединенных Штатов. Все эти акторы считают, что *Развертывание ПРО* является предпочтительной альтернативой по данному критерию. Убывание предпочтительности остальных альтернатив происходит в следующем порядке: *Глобализация ПРО*, *Исследования в области ПРО* и *Закрытие программы ПРО*.

В табл. 5-17 приведена суперматрица, в которой показаны приоритеты альтернатив и критериев, влияющих на *Военную мощь* США. На альтернативу *A1* (Развертывание ПРО) наибольшее влияние оказывают: *Оборонная промышленность* (0.559), *Президент — Правительство* (0.516) и *Конгресс* (0.506). Невысокий приоритет влияния компонента *Технические эксперты* (0.29) отражает мнение некоторых ученых, которые считают, что проект ПРО технически нереализуем, поэтому развертывание ПРО не внесет значительного вклада в военную мощь США.

В табл. 5-18 приведены матрицы парных сравнений компонентов по силе их взаимного влияния друг на друга с точки зрения критерия *Военная мощь*, а в столбцах табл. 5-19 — нормированные собственные векторы взаимного влияния компонентов.

Таблица 5-17

Суперматрица сетевой модели по критерию *Военная мощь* (рис. 5-12)

Военная мощь		*Альтернатива*				*Конгресс*	*Президент — Правительство*	*Оборонная промышленность*	*Другие государства*	*Технические эксперты*
		A1	**A2**	**A3**	**A4**	Конгресс	Деп. безопасн.	Промышленность	Союзники	Тех. эксп.
Альтернатива	**A1**	0	0.576	1.0	0	0.506	0.5158	0.5587	0	0.2878
	A2	0	0	0	0	0.289	0.2929	0.2574	1.0	0.2623
	A3	0	0.424	0	0	0.1307	0.1367	0.1382	0	0.2369
	A4	0	0	0	0	0.0744	0.0546	0.0457	0	0.213
Конгресс	Конгресс	1.0	1.0	1.0	0	0	1.0	1.0	1.0	1.0
Президент — Правительство	Деп. безопасн.	1.0	1.0	1.0	0	1.0	0	1.0	1.0	1.0
Оборонная промышленность	Пром-сть	1.0	1.0	1.0	0	0	0	0	0	0
Другие государства	Союзники	1.0	1.0	1.0	0	0	1.0	0	0	0
Технические эксперты	Тех. эксп.	1.0	1.0	1.0	0	0	0	0	0	0

Таблица 5-18

Матрицы парных сравнений компонентов сети Военная мощь по силе их взаимного влияния

Альтернативы	*Альтернативы*	*Конгресс*	*Оборонная промышленность*	*Другие государства*	*Президент — Правительство*	*Технические эксперты*	**Приоритеты**
Альтернативы	1	0.1667	0.25	1.333	0.1429	0.5556	0.0486
Конгресс	6	1	2.2	6.2	0.7407	3.2	0.2889
Оборонная промышленность	4	0.4546	1	4	0.4115	2.26	0.1653
Другие государства	0.752	0.1613	0.25	1	0.125	0.5263	0.0425
Президент — Правительство	7	1.35	2.43	8	1	5.1	0.3742
Технические эксперты	1.8	0.3125	0.4425	1.9	0.1961	1	0.0805

Конгресс	*Альтернативы*	*Президент*	**Приоритеты**
Альтернативы	1	0.5638	0.3605
Президент	1.7736	1	0.6395

Оборонная пром-сть	*Альтернативы*	*Конгресс*	*Президент*	**Приоритеты**
Альтернативы	1	0.677	0.539	0.2292
Конгресс	1.477	1	0.66	0.3181
Президент	1.856	1.515	1	0.4528

Другие гос-ва	*Альтернативы*	*Конгресс*	*Президент*	**Приоритеты**
Альтернативы	1	0.555	0.326	0.1671
Конгресс	1.8	1	0.463	0.2781
Президент	3.068	2.16	1	0.5548

Президент — Прав-во	*Альтернативы*	*Конгресс*	*Другие гос-ва*	**Приоритеты**
Альтернативы	1	2.189	3.66	0.5735
Конгресс	0.457	1	2.038	0.28
Другие гос-ва	0.273	0.491	1	0.1467

Окончание таблицы 5-18

Технические эксперты	*Альтернативы*	*Конгресс*	*Президент*	**Приоритеты**
Альтернативы	1	2.538	2.538	0.5592
Конгресс	0.394	1	1	0.2204
Президент	0.394	1	1	0.2204

Таблица 5-19

Нормированные векторы приоритетов влияния компонентов друг на друга

Компоненты	*Альтернативы*	*Конгресс*	*Оборонная промышленность*	*Другие государства*	*Президент — Правительство*	*Технические эксперты*
Альтернативы	0.0486	0.3605	0.2292	0.1671	0.5735	0.5592
Конгресс	0.2889	0	0.3181	0.2781	0.28	0.2204
Оборонная промышленность	0.1653	0	0	0	0	0
Другие государства	0.0425	0	0	0	0.1467	0
Президент — Правительство	0.3742	0.6395	0.4528	0.5548	0	0.2204
Технические эксперты	0.0805	0	0	0	0	0

Таблица 5-20

Взвешенная суперматрица и ее предел

Военная мощь		***Альтернатива***				***Конгресс***	***Президент — Правит.***	***Оборонная промышленность***	***Другие гос-ва***	***Технич. эксперты***	**Предел**
		A1	**A2**	**A3**	**A4**	Конгресс	Деп. безопасн.	Промышленность	Союзники	Тех. эксп.	
Альтернатива	**A1**	0	0.028	0.0485	0	0.182	0.296	0.128	0	0.161	0.153
	A2	0	0	0	0	0.104	0.168	0.059	0.167	0.147	0.097
	A3	0	0.021	0	0	0.047	0.078	0.032	0	0.1325	0.044
	A4	0	0	0	0	0.027	0.031	0.0105	0	0.119	0.020
Конгресс	Конгресс	0.304	0.289	0.289	0	0	0.280	0.318	0.278	0.220	0.222
Президент — Правит.	Деп. безопасн.	0.393	0.374	0.374	0	0.6395	0	0.453	0.555	0.220	0.326
Оборонная промышленность	Промышленность	0.174	0.165	0.165	0	0	0	0	0	0	0.051
Другие гос-ва	Союзники	0.045	0.042	0.042	0	0	0.147	0	0	0	0.062
Технич. эксперты	Технич. эксперты	0.085	0.081	0.081	0	0	0	0	0	0	0.025

Таблица 5-21

Результаты обработки сети, соответствующей критерию *Технологический прогресс* (рис. 5-13) в иерархии выгод

Технологический прогресс (суперматрица)		***Альтернатива***				***Конгресс***	***Президент — Правит.***	***Оборонная промышленность***	***Другие гос-ва***	***Технич. эксперты***
		A1	**A2**	**A3**	**A4**	Конгресс	Деп. безопасн	Промышленность	Союзники	Тех. эксп.
Альтернатива	**A1**	0	0.569	0	0	0.426	0.494	0.513	0	0.34
	A2	0	0	0	0	0.284	0.279	0.290	1.0	0.3
	A3	0	0.431	0	0	0.174	0.162	0.146	0	0.21
	A4	0	0	0	0	0.1155	0.065	0.050	0	0.15
Конгресс	Конгресс	0	0	0	0	0	0	1.0	0	1.0
Президент — Правит.	Деп. безопасности	0	0	0	0	1.0	0	1.0	0	1.0
Оборонная промышленность	Промышленность	1.0	0	1.0	0	0	1.0	0	0	0
Другие гос-ва	Союзники	0	1.0	0	0	0	1.0	0	0	0
Технич. эксперты	Технич. эксперты	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Окончание таблицы 5-21

Приоритеты взаимного влияния компонентов	*Альтернативы*	*Конгресс*	*Президент — Правительство*	*Оборонная промышленность*	*Другие государства*	*Технические эксперты*
Альтернативы	0.3285	0.3597	0.3708	0.2173	1.0	0.518
Конгресс	0	0	0	0.35	0	0.2384
Президент — Правительство	0	0.6403	0	0.4327	0	0.2436
Оборонная промышленность	0.4396	0	0.4618	0	0	0
Другие государства	0.2319	0	0.1675	0	0	0
Технические эксперты	0	0	0	0	0	0

Взвешенная суперматрица и ее предел		***Альтернатива***				***Конгресс***	***Президент — Правит.***	***Оборонная промышленность***	***Другие гос-ва***	***Технич. эксперты***	**Предел**
		A1	A2	A3	A4	Конгресс	Деп. безопасн.	Промышленность	Союзники	Тех. эксп.	
Альтернатива	**A1**	0	0.334	0	0	0.153	0.183	0.1115	0	0.176	0.129
	A2	0	0	0	0	0.102	0.1035	0.063	1.0	0.155	0.138
	A3	0	0.253	0	0	0.0625	0.06	0.032	0	0.1095	0.062
	A4	0	0	0	0	0.0415	0.024	0.011	0	0.078	0.012
Конгресс	Конгресс	0	0	0	0	0	0	0.35	0	0.238	0.1
Президент — Правит.	Деп. безопасности	0	0	0	0	0.64	0	0.433	0	0.244	0.187
Оборонная промышленность	Промышленность	1.0	0	1.0	0	0	0.462	0	0	0	0.282
Другие гос-ва	Союзники	0	0.414	0	0	0	0.1675	0	0	0	0.09
Технич. эксперты	Технич. эксперты	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Таблица 5-22

Результаты обработки сети, соответствующей критерию
Продажа вооружений (рис. 5-14) в иерархии возможностей

Продажа вооружений (суперматрица)		***Альтернативы***				***Конгресс***	***Президент — Правит-во***	***Оборон. пром.***	***Другие государства***				***Технич. эксперты***
		A1	**A2**	**A3**	**A4**	Конгресс	Деп. безоп.	Пром-сть	Государства-противники	Союз-ники	Супер-державы	Терро-ризм	Техн. эксп.
Альтер-нативы	**A1**	0	0	0	0	0.381	0.51	0	0	0	0	0	0
	A2	0	0	0	0	0.318	0.2955	0	0	0	0	0	0
	A3	0	0	0	0	0.179	0.136	0	0	0	0	0	0
	A4	0	0	0	0	0.122	0.058	0	0	0	0	0	0
Конгр.	Конгресс	1.0	1.0	1.0	0	0	1.0	1.0	0	1.0	0	0	1.0
През. — Прав.	Деп. безоп.	1.0	1.0	1.0	0	1.0	0	1.0	0	1.0	0	0	1.0
Обор. пром	Пром-сть	1.0	1.0	1.0	0	1.0	1.0	0	0	0	0	0	0
Другие гос-ва	Гос-ва-противники	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Союзники	1.0	1.0	1.0	0	0	1.0	1.0	1.0	0	1.0	1.0	0
	Супердержавы	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	Терроризм	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Тех. эксп.	Техн. эксперты	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Окончание таблицы 5-22

Приоритеты взаимного влияния компонентов	*Альтернативы*	*Конгресс*	*Президент — Правительство*	*Оборонная пром-сть*	*Другие государства*	*Технические эксперты*
Альтернативы	0	0.225	0.1806	0.1443	0	0
Конгресс	0.291	0	0.093	0.164	0.338	0.4944
Президент — Правительство	0.467	0.4553	0	0.2415	0.404	0.5056
Оборонная промышленность	0.1467	0.32	0.2366	0.2086	0	0
Другие государства	0.0967	0	0.49	0.242	0.258	0
Технические эксперты	0	0	0	0	0	0

Взвешенная суперматрица и ее предел		*Альтернативы*				*Конгресс*	*Президент — Правит-во*	*Оборон. пром.*	*Другие государства*				*Технич. экспер.*	**Предел**
		A1	A2	A3	A4	Конгресс	Деп. безоп.	Пром-сть	Гос-ва-противн.	Союзни-ки	Супер-державы	Терро-ризм	Техн. эксп.	
Альтер-нативы	**A1**	0	0	0	0	0.0856	0.092	0	0	0	0	0	0	**0.0467**
	A2	0	0	0	0	0.0716	0.0534	0	0	0	0	0	0	**0.0315**
	A3	0	0	0	0	0.0402	0.0246	0	0	0	0	0	0	**0.016**
	A4	0	0	0	0	0.0275	0.0105	0	0	0	0	0	0	**0.0089**
Конгр	Конгр.	0.291	0.291	0.291	0	0	0.093	0.2533	0	0.4557	0	0	0.4944	**0.2004**
През. — Прав.	Деп. безоп.	0.466	0.466	0.466	0	0.4553	0	0.373	0	0.5443	0	0	0.5056	**0.3175**
Обор. пром	Пром-сть	0.147	0.147	0.147	0	0.32	0.2366	0	0	0	0	0	0	**0.1542**
Другие гос-ва	Гос-ва-противн.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
	Союзн.	0.097	0.097	0.097	0	0	0.49	0.3736	1.0	0	1.0	1.0	0	**0.2249**
	Супер-державы	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
	Терро-ризм	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**
Тех. эксп.	Техн. эксп.	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**

Таблица 5-23

Результаты обработки сети, соответствующей критерию *Угроза безопасности* (рис. 5-16) в иерархии издержек

Угроза безопасности (суперматрица)		*Альтернативы*				*Конгресс*	*Президент — Правит-во*	*Другие государства*			
		A1	A2	A3	A4	Конгресс	Деп. безоп.	Государства-противники	Союз-ники	Супер-державы	Терро-ризм
Альтер-нативы	A1	0	0	0	0	0.1397	0.076	0	0	0	0
	A2	0	0	0	0	0.204	0.1554	0	0	0	0
	A3	0	0	0	0	0.261	0.278	0	0	0	0
	A4	0	0	0	0	0.3954	0.491	0	0	0	0
Конгр.	Конгресс	0	0	0	0	0	0	1.0	1.0	1.0	1.0
През. — Прав.	Деп. безоп.	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0	1.0	1.0	1.0	1.0
Другие гос-ва	Государства-противники	0.462	0.4552	0.4552	0.4552	0	0	0	0	0	0
	Союзники	0.083	0.0696	0.0696	0.0696	0	1.0	1.0	0	1.0	1.0
	Супердер-жавы	0.299	0.3124	0.3124	0.3124	0	0	0	0	0	0
	Терроризм	0.155	0.1628	0.1628	0.1628	0	0	0	0	0	0

Окончание таблицы 5-23

Приоритеты взаимного влияния компонентов	*Альтернативы*	*Конгресс*	*Президент — Правительство*	*Другие государства*
Альтернативы	0	0.375	0.4037	0
Конгресс	0	0	0	0.123
Президент — Правительство	0.41	0.625	0	0.377
Другие государства	0.59	0	0.5963	0.5

Взвешенная суперматрица и ее предел		*Альтернативы*				*Конгресс*	*Президент — Правит-во*	*Другие государства*				**Предел**
		A1	A2	A3	A4	Конгресс	Деп. безоп.	Гос-ва-противн.	Союзники	Супердержавы	Терроризм	
Альтернативы	**A1**	0	0	0	0	0.0524	0.0307	0	0	0	0	0.0155
	A2	0	0	0	0	0.0764	0.0627	0	0	0	0	0.0292
	A3	0	0	0	0	0.098	0.1122	0	0	0	0	0.0491
	A4	0	0	0	0	0.1483	0.1981	0	0	0	0	0.0847
Конгр.	Конгресс	0	0	0	0	0	0	0.123	0.246	0.123	0.123	0.08
През. — Прав.	Деп. безоп.	0.41	0.41	0.41	0.41	0.625	0	0.3766	0.754	0.3766	0.3766	0.368
Другие гос-ва	Гос-ва-противники	0.273	0.269	0.269	0.269	0	0	0	0	0	0	0.048
	Союзники	0.049	0.041	0.041	0.041	0	0.5963	0.5005	0	0.5005	0.5005	0.2758
	Супердержавы	0.177	0.184	0.184	0.184	0	0	0	0	0	0	0.033
	Терроризм	0.092	0.096	0.096	0.096	0	0	0	0	0	0	0.017

Таблица 5-24

Результаты обработки сети, соответствующей критерию Будущие капиталовложения (рис. 5-18) в иерархии издержек

Будущие капиталовложения (суперматрица)		***Альтернативы***				***Конгресс***	***Президент — Правительство***	***Оборонная промышленность***	***Технические эксперты***
		A1	**A2**	**A3**	**A4**	Конгресс	Департамент безопасности	Промышленность	Техн. эксп.
Альтернативы	**A1**	0	0	0	0	0.5316	0.5195	0.489	0.5603
	A2	0	0	0	0	0.2752	0.2282	0.3163	0.258
	A3	0	0	0	0	0.1303	0.1603	0.1336	0.1264
	A4	0	0	0	0	0.063	0.092	0.0613	0.0553
Конгр.	Конгресс	1.0	1.0	1.0	0	0	1.0	1.0	1.0
През. — Прав.	Деп. безоп.	1.0	1.0	1.0	0	1.0	0	1.0	1.0
Оборон. пром.	Пром-сть	1.0	1.0	1.0	0	0	0	0	0
Техн. эксп.	Техн. эксперты	0	0	0	0	0	0	0	0

Приоритеты взаимного влияния компонентов	*Альтернативы*	*Конгресс*	*Президент — Правительство*	*Оборонная промышленность*	*Технические эксперты*
Альтернативы	0	0.515	0.563	0.5564	0.7143
Конгресс	0.351	0	0.437	0.2048	0.143
Президент —Правительство	0.418	0.485	0	0.2387	0.143
Оборонная промышленность	0.231	0	0	0	0
Технические эксперты	0	0	0	0	0

Окончание таблицы 5-24

Взвешенная суперматрица и ее предел		*Альтернативы*				*Конгресс*	*Президент — Правит-во*	*Оборонная пром-сть*	*Технич. эксперты*	Предел
		A1	**A2**	**A3**	**A4**	Конгресс	Деп. безоп.	Пром-сть	Техн. эксп.	
Альтернативы	**A1**	0	0	0	0	0.2736	0.2924	0.272	0.4002	**0.1844**
	A2	0	0	0	0	0.1417	0.1285	0.176	0.1843	**0.0913**
	A3	0	0	0	0	0.067	0.0902	0.0743	0.0903	**0.0514**
	A4	0	0	0	0	0.0324	0.0518	0.034	0.0395	**0.0271**
Конгр.	Конгресс	0.351	0.351	0.351	0	0	0.437	0.2048	0.143	**0.2685**
През. — Прав.	Деп. безоп.	0.418	0.418	0.418	0	0.4853	0	0.2367	0.143	**0.2974**
Оборон. пром.	Пром-сть	0.231	0.231	0.231	0	0	0	0	0	**0.08**
Техн. эксп.	Техн. эксперты	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**

Таблица 5-25

Результаты обработки сети, соответствующей критерию *Техническая неудача* (рис. 5-19) в иерархии рисков

Техническая неудача (суперматрица)		***Альтернатива***				***Конгресс***	***Президент — Правительство***	***Оборонная промышленность***	***Технич. эксперты***
		A1	**A2**	**A3**	**A4**	Конгресс	Деп. безопасн.	Промышленность	Тех. эксп.
Альтернатива	**A1**	0	0	0	0	0.518	0.4653	0.359	0.59
	A2	0	0	0	0	0.266	0.287	0.2665	0.2454
	A3	0	0	0	0	0.1396	0.1536	0.202	0.1077
	A4	0	0	0	0	0.0764	0.0942	0.1725	0.057
Конгресс	Конгресс	1.0	1.0	1.0	0	0	0	1.0	1.0
Президент — Правительство	Деп. безопасн.	1.0	1.0	1.0	0	0	0	1.0	1.0
Оборонная пром-сть	Пром-сть	1.0	1.0	1.0	0	0	0	0	0
Технические эксперты	Тех. эксп.	0	0	0	0	0	0	0	0

Приоритеты взаимного влияния компонентов	*Альтернативы*	*Конгресс*	*Президент — Правительство*	*Оборонная промышленность*	*Технические эксперты*
Альтернативы	0	1.0	1.0	0.6638	0.718
Конгресс	0.1654	0	0	0.1622	0.1364
Президент — Правительство	0.3254	0	0	0.174	0.1456
Оборонная промышленность	0.5093	0	0	0	0
Технические эксперты	0	0	0	0	0

Окончание таблицы 5-25

Взвешенная суперматрица и ее предел		***Альтернатива***				***Конгресс***	***Президент — Правительство***	***Оборонная пром-сть***	***Технич. эксперты***	**Предел**
		A1	**A2**	**A3**	**A4**	Конгресс	Деп. безопасн.	Пром-сть	Тех. эксп.	
Альтернатива	**A1**	0	0	0	0	0.518	0.4653	0.2383	0.4235	**0.2024**
	A2	0	0	0	0	0.266	0.287	0.177	0.1762	**0.1252**
	A3	0	0	0	0	0.1396	0.1536	0.134	0.0774	**0.0755**
	A4	0	0	0	0	0.0764	0.0942	0.1145	0.041	**0.0524**
Конгресс	Конгресс	0.1654	0.1654	0.1654	0	0	0	0.1622	0.1364	**0.1138**
Президент — Правительство	Деп. безопасн.	0.3254	0.3254	0.3254	0	0	0	0.174	0.1456	**0.1916**
Оборонная пром-сть	Пром-сть	0.5093	0.5093	0.5093	0	0	0	0	0	**0.239**
Технические эксперты	Тех. эксп.	0	0	0	0	0	0	0	0	**0**

Таблица 5-26

Результаты обработки сети, соответствующей критерию Гонка вооружений (рис. 5-20) в иерархии рисков

Взвешенная суперматрица и ее предел		*Альтернативы*				*Конгресс*	*Президент — Правит-во*	*Другие государства*			
		A1	A2	A3	A4	Конгресс	Деп. безоп.	Гос-ва-противн.	Союзники	Супердержавы	Терроризм
Альтер-нативы	A1	0	0	0	0	0.4365	0.3928	0	0	0	0
	A2	0	0	0	0	0.2696	0.2945	0	0	0	0
	A3	0	0	0	0	0.1727	0.1867	0	0	0	0
	A4	0	0	0	0	0.1212	0.1261	0	0	0	0
Конгр.	Конгресс	0	0	0	0	0	0	1.0	1.0	1.0	1.0
През. — Прав.	Деп. безоп.	0	0	0	0	0	0	1.0	1.0	1.0	1.0
Другие гос-ва	Гос-ва-противники	0.43	0.47	0.43	0.43	0.4323	0.4362	0	0	0	0
	Союзники	0.089	0.078	0.089	0.089	0.0874	0.089	0	0	0	0
	Супердержавы	0.328	0.276	0.328	0.328	0.3316	0.3296	0	0	0	0
	Терроризм	0.153	0.175	0.153	0.153	0.1487	0.1452	0	0	0	0

Окончание таблицы 5-26

Приоритеты взаимного влияния компонентов	*Альтернативы*	*Конгресс*	*Президент — Правительство*	*Другие государства*
Альтернативы	0	0.41	0.2953	0
Конгресс	0	0	0	0.3284
Президент — Правительство	0	0	0	0.6716
Другие государства	1.0	0.59	0.7046	0

Взвешенная супер-матрица и ее предел		***Альтернативы***				***Конгресс***	***Президент — Правит-во***	***Другие государства***				**Предел**
		A1	**A2**	**A3**	**A4**	Конгресс	Деп. безоп.	Госуд-ва-противн.	Союзники	Супер-державы	Терро-ризм	
Альтер-нативы	***A1***	0	0	0	0	0.179	0.116	0	0	0	0	**0.0586**
	A2	0	0	0	0	0.1105	0.087	0	0	0	0	**0.0406**
	A3	0	0	0	0	0.0708	0.055	0	0	0	0	**0.0258**
	A4	0	0	0	0	0.0497	0.0373	0	0	0	0	**0.0177**
Конгр.	**Конгресс**	0	0	0	0	0	0	0.3284	0.3284	0.3284	0.3284	**0.1407**
През. — Прав.	**Деп. безоп.**	0	0	0	0	0	0	0.6716	0.6716	0.6716	0.6716	**0.2879**
Другие гос-ва	**Гос-ва-противники**	0.43	0.47	0.43	0.43	0.255	0.3074	0	0	0	0	**0.1874**
	Союзники	0.089	0.078	0.089	0.089	0.0516	0.0628	0	0	0	0	**0.0376**
	Супер-державы	0.328	0.276	0.328	0.328	0.1957	0.2323	0	0	0	0	**0.1391**
	Терроризм	0.153	0.175	0.153	0.153	0.0877	0.1022	0	0	0	0	**0.0645**

Таблица 5-27

Заключительные результаты для примера о системе ПРО

	ВЫГОДЫ 0.267	***ВОЗМОЖНОСТИ 0.182***	***ИЗДЕРЖКИ*** (обратные) ***0.361***	***РИСКИ*** (обратные) ***0.19***	***Обобщенные оценки***	
					Аддитивная	*Мультипликативная*
A1 Развертывание системы ПРО	0.439	0.474	0.306	0.122	**0.337**	0.334
A2 Глобализация	0.352	0.289	0.305	0.18	**0.291**	0.31
A3 Исследования	0.158	0.151	0.236	0.284	**0.209**	0.221
A4 Закрытие программы ПРО	0.05	0.086	0.153	0.414	**0.163**	0.135

Взвешенная суперматрица, полученная путем умножения блоков суперматрицы (табл. 5-17) на приоритеты компонентов из табл. 5-19, приведена в табл. 5-20, в последнем столбце которой показан результат ее возведения в предельные степени. Этот столбец (Предел) является сокращенным представлением предельной суперматрицы, которая, как известно, имеет одинаковые столбцы.

В табл. 5-21–5-26 приведены результаты обработки суждений для сетевых структур, соответствующих остальным критериям, за исключением критериев *Вложенные средства* и *Побочные эффекты*.

В табл. 5-27 приведены результирующие приоритеты альтернатив по *Выгодам, Издержкам, Возможностям* и *Рискам*, а также обобщенные аддитивная и мультипликативная оценки.

В результате всестороннего анализа с учетом выгод, издержек, возможностей и рисков установлено, что лучшей альтернативой является реализация существующей программы ПРО. Этот результат можно объяснить тем, что альтернатива *A1* имеет максимальные комплексные оценки по *Выгодам, Возможностям* и *Издержкам*.

5-7. Решение об организации кондоминиума

Автор данного исследования Марсель Минутоло лично участвовал в принятии рассматриваемого решения в качестве научного консультанта и инвестора. Проблема заключалась в том, чтобы решить, стоит ли компании приобрести старое здание в центре города и превратить его в кондоминиум. Анализ факторов, влияющих на решение, выявил 58 управляющих критериев, для каждого из которых были построены и обработаны сетевые структуры, содержащие альтернативы решения. Представляя полученные результаты мэру, Марсель Минутоло сказал, что на проведение анализа потребовалось 60 часов чистого времени. Из этого можно заключить, что на анализ сложных решений правительству или корпорации необходимо отводить соответствующее количество времени.

Сущность проблемы

При выборе места для строительства или размещения какого-либо объекта необходимо учитывать множество факторов. Эти факторы могут быть осязаемыми или неосязаемыми. Первые достаточно просто поддаются измерению, вторые, будучи неизмеряемыми, могут оказаться гораздо более важными. В данном примере рассматривается большое многоэтажное здание школы, построенное в начале девятнадцатого века и расположенное в центре большого американского города. Оно представляет историческую ценность. На момент принятия решения в нем живут люди, но здание находится в аварийном состоянии. Оно выставлено на продажу и представляет интерес для вложения инвестиций с целью его дальнейшей эксплуатации, но до приглашения инвесторов и кредиторов необходимо собрать полную информацию для принятия решения.

В качестве возможных альтернатив решения в данном примере рассматривались следующие: 1) не покупать здание; 2) купить здание и проводить его постепенную реконструкцию; 3) купить и сразу же перестроить здание.

В процессе анализа решения учитывались следующие факторы:

Осязаемые. На момент решения в здании размещаются несколько некоммерческих организаций, но более половины площадей свободны. Здание имеет новую крышу и оснащено противопожарной системой. Однако в постройке содержится в различных формах вредный асбест, а паровому котлу исполнилось почти сто лет. С учетом этих и других особенностей строения застройщик должен оценить такие факторы, как стоимость покупки, условия кредитования, банковскую процентную ставку, ставку налога, а также затраты на реконструкцию здания с целью организации в нем кондоминиума.

Неосязаемые. Застройщик должен учитывать политический климат, т. е. отношение администрации города, района и других государственных учреждений к предлагаемому проекту на различных стадиях его реализации. Администрация района заинтересована в развитии своей территории, поэтому она будет предлагать налоговые льготы для привлечения инвесторов. Городские власти также собираются пойти навстречу застройщикам путем внесения необходимых изменений в местные законы. Мэр города известен своей заботой о приведении в порядок исторических памятников, что способствовало появлению ряда новых бизнес-проектов. Многие жители города неодобрительно относятся к проекту, так как хотят, чтобы исторические памятники города остались в первозданном виде. Большая часть денег, которые были отпущены правительством на реконструкцию государственных исторических памятников, давно истрачена. Поэтому маловероятно, что федеральное правительство или штат смогут оказать финансовую помощь. Однако они могут проявить интерес и оказать помощь в рамках программы улучшения экологической обстановки, так как реконструкция здания связана с удалением вредных отходов из цента города.

Кроме политической обстановки, следует учитывать местные особенности: город не так давно испытывал экономические трудности, но в настоящее время справился с ними. В связи с этим в город вернулись люди, многие из которых — молодые профессионалы с относительно высоким уровнем свободных доходов. В городе имеется несколько университетов и

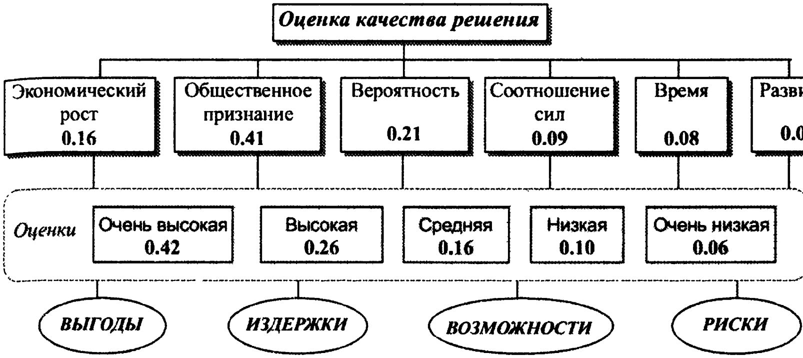


Рис. 5-21. Критерии для оценки категорий качества решения

много развлечений. Центр города, где расположено здание, в настоящее время реконструируется.

В принятии решений важную роль играют личностные аспекты, например личная и деловая репутация застройщика, кредитных организаций, правительственных агентств и местных предприятий.

Результаты данного анализа должны помочь застройщику принять решение о том, следует ли приобрести здание или отказаться от покупки.

Для анализа возможных альтернатив использовались категории выгод, возможностей, издержек и рисков. Учитывая тот факт, что в большинстве задач принятия решений эти категории не являются равнозначными, мы использовали для их оценки иерархию персональных критериев ЛПР, представленную на рис. 5-21. Эту иерархию мы будем называть иерархией первого уровня. В результате ее обработки мы получим весовые коэффициенты *ВЫГОД, ИЗДЕРЖЕК, ВОЗМОЖНОСТЕЙ* и *РИСКОВ*. На самом верхнем уровне расположена главная цель задачи — выбрать наилучшее решение. В результате сравнения критериев второго уровня относительно цели были получены их приоритеты. Выгоды, возможности, издержки и риски оценивались с помощью набора лингвистических стандартов, приоритеты которых вычислялись на основе парных сравнений.

Результаты оценивания выгод, возможностей, издержек и рисков приведены в табл. 5-28. Приоритеты критериев были умножены на значения соответствующих оценок и суммированы по каждой строке для получения обобщенного результата. Например, *ВЫГОДЫ* по критерию *Экономический рост* имеют оценку *Высокие*, следовательно, значение 0.26 было умножено на 0.16. Обобщенная оценка *ВЫГОД* получена путем суммирования значений по всем критериям. Полученные таким образом обобщенные оценки всех категорий затем были нормализованы. Впоследствии мы будем их использовать в качестве весовых коэффициентов соответствующих категорий качества решения.

Таблица 5-28

Вычисление весовых коэффициентов *ВЫГОД, ИЗДЕРЖЕК, ВОЗМОЖНОСТЕЙ* и *РИСКОВ*

	Экономический рост (0.16)	Общественное признание (0.41)	Вероятность (0.21)	Соотношение сил (0.09)	Время (0.08)	Развитие (0.05)	Обобщенный результат (нормир.)
ВЫГОДЫ	Высокая	Средняя	Низкая	Низкая	Низкая	Средняя	**0.184**
ВОЗМОЖНОСТИ	Очень высокая	Средняя	Высокая	Средняя	Очень низкая	Высокая	**0.263**
ИЗДЕРЖКИ	Очень высокая	Низкая	Низкая	Средняя	Очень высокая	Высокая	**0.228**
РИСКИ	Очень высокая	Средняя	Очень высокая	Низкая	Высокая	Очень высокая	**0.326**

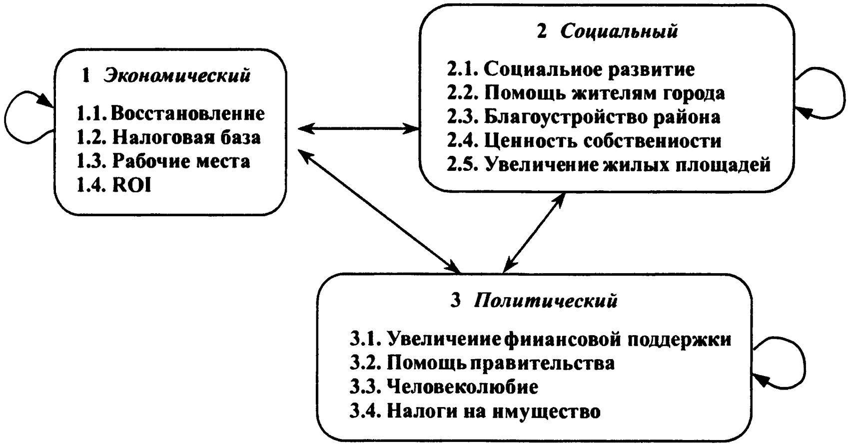


Рис. 5-22. Сеть управляющих критериев для *ВЫГОД*

Приоритеты выгод, возможностей, издержек и рисков решения показывают, что самым важным аспектом проекта является *РИСК*. Это значит, что риски, связанные с разработкой проекта, в наибольшей степени будут влиять на принятие окончательного решения.

Для каждой из категорий качества решения мы построили сеть, содержащую управляющие критерии. Пример такой сети для *ВЫГОД* показан на рис. 5-22. Остальные сетевые модели содержат те же самые компоненты, но состав их элементов различается. Например, *Экономический* компонент *ВЫГОД* содержит элементы *Восстановление, Налоговая база, Рабочие места и Окупаемость инвестиций*, в то время как *Экономический* компонент *ИЗДЕРЖЕК* содержит элементы *Стоимость покупки, Реконструкция, Юридические платежи, Комиссионные платежи, Стоимость подряда, Стоимость архитектурного проекта.*

На последнем уровне модели рассматривается 58 сетевых структур, содержащих альтернативы. Эти сети соответствуют управляющим критериям предыдущего уровня и имеют одинаковую структуру, показанную на рис. 5-23. В разных сетях используются разные суждения. В общем случае сетевые структуры нижнего уровня, включающие альтернативы, могут отличаться по структуре и составу.

Исследование управляющих критериев

В сети *ВЫГОД* (рис. 5-22) содержатся три управляющих критерия: *Экономический, Социальный* и *Политический*. Их смысл сводится к соответствующим выгодам, которые можно получить от решения. ***Экономические выгоды*** ожидаются от восстановления здания, расширения налоговой базы, увеличения числа рабочих мест и от окупаемости инвестиций. Проект ориентирован на реставрацию исторического места в городе, которое может принести прибыль в будущем. Если в районе будут жить молодые специалисты, это увеличит местную налоговую базу. Кроме того, проект предполагает создание новых рабочих мест для его реализации и в будущем за счет обслуживания возросшего населения. Основанный на проектных расчетах коэффициент окупаемости инвестиций оценивается как «умеренный».

Социальные выгоды связаны с надеждами на социальное развитие, т. е. подразумевается, что проект будет способствовать увеличению числа организаций, которые занимаются улучшением условий жизни в районе. Кроме того, возможны внешние источники финансирования, способные оказать помощь жителям в форме правительственных грантов, финансовой поддержки городских властей и пожертвований.

Политические выгоды ожидаются в форме участия благотворительных организаций, содействия правительства, увеличения налоговых поступлений и повышения заботы о человеке.

В сети *ВОЗМОЖНОСТЕЙ* рассматриваются ***Экономические возможности***, которые определяются потенциальным возрастанием окупаемости инвестиций, а также доходами от оплаты квартир, от будущих предприятий и от увеличения оборота розничной торговли в районе. ***Социальные возможности*** связаны с увеличением количества жителей, увеличением жилых площадей и оздоровлением социальной сферы. В качестве ***Политических возможностей*** рассматриваются улучшение имиджа города, благосклонность общественного мнения, пожертвования, изменение зональных тарифов, развитие местного самоуправления и восстановление исторического облика города.

Сеть *ИЗДЕРЖЕК* включает экономические, социальные и политические издержки. ***Экономические издержки*** содержат следующие элементы: стоимость покупки здания (575 000 долларов), затраты на его реконструкцию в кондоминиум, которая оценивается в три миллиона долларов, юридические платежи, составляющие примерно 36 000 долларов, комиссионные расходы (12 000 долларов), стоимость подряда (35 000 долларов) и стоимость архитектурного проекта (35 000 долларов). К ***Социальным издержкам*** относятся неудобства, шум и перемещения, связанные со строительными работами, а также то, что средства застройщика будут отвлечены от альтернативного использования. ***Политические издержки*** связаны с распределением ресурсов, временем строительства, переселением людей, изменением зональных тарифов и административных документов.

Рассмотрим управляющие критерии в сети *РИСКОВ*. ***Экономические риски*** связаны с кредитованием, процентной ставкой, недостаточным спросом, несвоевременностью поставок, с местными (локальными) рисками и с риском управления, подразумевающим препятствия для совместного осуществления проекта. К ***Социальным рискам*** отнесены следующие: негативное общественное мнение, усиление влияния властей, оказывающих содействие проекту, отрицательное влияние на здоровье и на окружающую среду. ***Политическими рисками*** являются: негативное влияние на имидж федеральных, городских и районных властей, а также на результаты голосования, на местное самоуправление и на престиж районов города.

Интерпретация приоритетов управляющих критериев

В структурах управляющих критериев существуют как внешние, так и внутренние зависимости, что показано на примере сети *ВЫГОД* (рис. 5-22). На *Социальный* и *Политический* компоненты почти всегда оказывает влияние *Экономика*. В свою очередь, социальная сфера оказывает давление на властные структуры, таким способом влияя на экономику.

В сети *ВОЗМОЖНОСТЕЙ* самый высокий приоритет имеет критерий *Окупаемость инвестиций* (0.147) что свидетельствует о важности экономического аспекта, а на втором месте находится критерий *Увеличение числа жителей* (0.13), принадлежащий социальному компоненту. Приоритеты, вычисленные для сетей, показывают аспекты, мало значимые при всестороннем исследовании. Например, развитие местного самоуправления (0.023) не представляет особой важности по сравнению с другими возможностями.

Сравнения управляющих критериев в сетях выполнялись в контексте той категории качества, для которой построена сеть. Например, если в сети рисков мы сравниваем элемент *Влияние на здоровье* с элементом *Влияние на окружающую среду* относительно *Имиджа местных властей*, мы должны задать вопрос: что более рискованно для местных властей: влияние на здоровье или на окружающую среду? В табл. 5-29 приведены управляющие критерии и их приоритеты, вычисленные на основе обработки сетей *ВЫГОД*, *ВОЗМОЖНОСТЕЙ*, *ИЗДЕРЖЕК* и *РИСКОВ*.

Сети решений последнего уровня, подчиненные управляющим критериям, которые перечислены в табл. 5-29, имеют одинаковую структуру, которая показана на рис. 5-23. Все эти сети содержат по три компонента: *Альтернативы*, *Персональные критерии ЛПР* и *Прочие акторы*. Составы элементов в компонентах приведены в табл. 5-30.

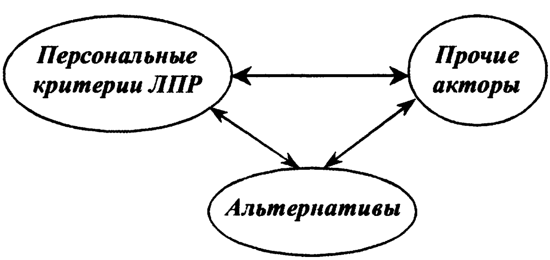


Рис. 5-23. Структура сети решений, соответствующая управляющим критериям

Таблица 5-29

Приоритеты управляющих критериев

	Экономический	Приоритет		*Социальный*	Приоритет		*Политический*	Приоритет	
		Локальн	Глобальн		Локальн	Глобальн		Локальн	Глобальн
ВЫГОДЫ	Восстановление	0.145	0.287	Социальное развитие	0.041	0.155	Увеличение финансовой поддержки	0.04	0.177
	Налоговая база	0.109	0.217	Помощь жителям	0.026	0.097	Помощь правительства	0.074	0.326
	Рабочие места	0.160	0.318	Благоустройство района	0.047	0.176	Человеколюбие	0.04	0.178
	Окупаемость инвестиций	0.089	0.178	Ценность собственности	0.072	0.267	Налоги на имущество	0.072	0.319
				Увеличение жилых площадей	0.082	0.304			
ВОЗМОЖНОСТИ	Окупаемость инвестиций	0.364	0.147	Увеличение числа жителей	0.349	0.13	Имидж города	0.352	0.078
	Квартирная плата	0.152	0.061	Увеличение жилых площадей	0.306	0.114	Общественное мнение	0.174	0.039
	Будущие предприятия	0.291	0.117	Оздоровление социальной сферы	0.346	0.129	Пожертвования	0.108	0.024
	Розничная торговля	0.193	0.078				Изменение зональных тарифов	0.098	0.022
							Развитие самоуправления	0.103	0.023
							Исторический облик	0.165	0.037

Окончание таблицы 5-29

	Экономический	Приоритет		*Социальный*	Приоритет		*Политический*	Приоритет	
		Локальн	Глобальн		Локальн	Глобальн		Локальн	Глобальн
ИЗДЕРЖКИ	Стоимость здания	0.217	0.052	Отвлечение средств	0.313	0.158	Размещение ресурсов	0.203	0.052
	Стоимость реконструкции	0.489	0.118	Неудобства	0.286	0.144	Время	0.118	0.03
	Юридические платежи	0.082	0.02	Шум	0.176	0.089	Переселение людей	0.371	0.095
	Комиссионные платежи	0.045	0.011	Перемещения	0.225	0.114	Изменение зональных тарифов	0.155	0.039
	Подрядчики	0.089	0.022						
	Архитектурный проект	0.078	0.019				Административные документы	0.154	0.039
РИСКИ	Кредитование	0.158	0.083	Общественное мнение	0.145	0.038	Имидж федеральных организаций	0.165	0.035
	Процентная ставка	0.102	0.053	Федеральные власти	0.293	0.078	Имидж местных властей	0.185	0.039
	Местные риски	0.095	0.05	Местные власти	0.181	0.048	Имидж районной администрации	0.141	0.03
	Управление	0.237	0.125	Влияние на здоровье	0.187	0.05	Голосование	0.134	0.028
	Спрос	0.189	0.1	Окружающая среда	0.193	0.051	Престиж районов	0.183	0.038
	Поставки	0.219	0.115				Самоуправление	0.193	0.04

Таблица 5-30

Состав компонентов сети решений для управляющих критериев

Компонент	*Элементы компонента*
Персональные критерии ЛПР	1. Экономический рост. 2. Общественное признание. 3. Вероятность. 4. Соотношение сил. 5. Время. 6. Развитие
Альтернативы	7. Не покупать и не строить. 8. Купить и реконструировать постепенно. 9. Купить и сразу перестроить в кондоминиум
Прочие акторы	10. Арендодатели. 11. Объединения собственников. 12. Управление реконструкции города. 13. Банки. 14. Комитет общественного развития. 15. Ипотечный банк

Результаты

Значения предельных приоритетов альтернатив, полученные для 58 сетевых структур управляющих критериев, были умножены на приоритеты этих критериев из табл. 5-29, после чего аддитивным способом были вычислены обобщенные приоритеты альтернатив для *ВЫГОД, ИЗДЕРЖЕК*, *ВОЗМОЖНОСТЕЙ* и *РИСКОВ*, приведенные в табл. 5-31.

В табл. 5-31 альтернативы, имеющие высокие значения приоритетов по *ИЗДЕРЖКАМ* и *РИСКАМ*, являются более дорогостоящими и рискованными и, следовательно, менее предпочтительными. Вычисления обратных значений приоритетов альтернатив по этим категориям качества приведены в табл. 5-32.

Таблица 5-31

Приоритеты альтернатив по ВЫГОДАМ, ИЗДЕРЖКАМ, ВОЗМОЖНОСТЯМ и РИСКАМ

Альтернативы	*ВЫГОДЫ*	*ВОЗМОЖНОСТИ*	*ИЗДЕРЖКИ*	*РИСКИ*
Не покупать здание	0.097	0.112	0.191	0.167
Купить и постепенно реконструировать	0.461	0.356	0.391	0.374
Купить и перестроить сразу	0.442	0.532	0.418	0.459

Таблица 5-32

Вычисление обратных значений приоритетов *ИЗДЕРЖЕК* и *РИСКОВ*

Альтернативы	ИЗДЕРЖКИ			РИСКИ		
	Исходное значение	Обратное значение	Обратное нормированное	Исходное значение	Обратное значение	Обратное нормированное
Не покупать здание	0.191	5.236	0.514	0.167	5.988	0.552
Купить и постепенно реконструировать	0.391	2.558	0.251	0.374	2.674	0.247
Купить и перестроить сразу	0.418	2.392	0.235	0.459	2.179	0.201

Для получения окончательных результатов, которыми являются приоритеты альтернатив относительно цели выбора, мы применяем следующие формулы аддитивной и мультипликативной свертки:

1. $F_{A_i}^{Mult} = \dfrac{(P_{A_i}^B)^{w_B}(P_{A_i}^O)^{w_O}}{(P_{A_i}^C)^{w_C}(P_{A_i}^R)^{w_R}}$;

2. $F_{A_i}^{Add} = w_B P_{A_i}^B + w_O P_{A_i}^O + w_C \big/ P_{A_i}^C + w_R \big/ P_{A_i}^R$;

3. $F_{A_i}^{Add1} = w_B P_{A_i}^B + w_O P_{A_i}^O + w_C(1 - P_{A_i}^C) + w_R(1 - P_{A_i}^R)$;

4. $F_{A_i}^{Add2} = w_B P_{A_i}^B + w_O P_{A_i}^O - w_C P_{A_i}^C - w_R P_{A_i}^R$.

Окончательные результаты синтеза приоритетов альтернатив приведены в табл. 5-33.

Лучшей альтернативой в соответствии со всеми принципами обобщения является покупка и немедленная перестройка здания. Только по формуле $F_{A_i}^{Add}$ она немного уступает первой альтернативе (отказ от покупки). Выше мы упоминали о недостатках этой формулы, связанных со слабым учетом высоких издержек и рисков. Применение формулы $F_{A_i}^{Add2}$ приводит к отрицательным значениям для всех альтернатив, что можно объяснить высокими приоритетами издержек и рисков в данной задаче. При этом последняя альтернатива имеет наиболее предпочтительное значение по сравнению с остальными.

Таблица 5-33

Результирующие значения приоритетов альтернатив относительно цели выбора

Альтернативы	*ВЫГОДЫ 0.184*	*ВОЗМОЖНОСТИ 0.263*	*ИЗДЕРЖКИ 0.228*	*РИСКИ 0.326*	$F_{A_i}^{Mult}$	$F_{A_i}^{Add}$	$F_{A_i}^{Add1}$	$F_{A_i}^{Add2}$
Не покупать здание	0.097	0.112	0.514	0.552	0.296	0.344	0.503	–0.051
Купить и постепенно реконструировать	0.461	0.356	0.251	0.247	0.349	0.316	0.521	–0.033
Купить и перестроить сразу	0.442	0.532	0.235	0.201	0.355	0.340	0.530	–0.023

5-8. Основные шаги МАС

1. Подробно описать рассматриваемую проблему принятия решения, включая цели, критерии, подкритерии, акторов и их цели, а также возможные исходы (результаты) решений. Детально охарактеризовать влияния, которые определяют структуру решения.

2. Для рассматриваемого решения сформулировать критерии и подкритерии в управляющих иерархиях выгод, возможностей, издержек и рисков и определить их приоритеты из матриц парных сравнений. Если величина глобального приоритета управляющего критерия или подкритерия не превышает 3 %, следует внимательно проанализировать возможность его устранения из иерархии. Программное обеспечение автоматически обнаруживает критерии (подкритерии), которые имеют подчиненные им сети. При парных сравнениях компонентов (элементов) сетей по управляющим критериям экспертам следует задавать вопросы следующего характера: а) для иерархий выгод и возможностей: какой из сравниваемых элементов приносит больше выгод или предоставляет больше возможностей в смысле влияния на достижение данного управляющего критерия?; б) для издержек и рисков: какой из двух сравниваемых элементов имеет более высокую стоимость или вызывает больший риск? Иногда (очень редко) сравнения могут выполняться в терминах обобщенных выгод, возможностей, издержек и рисков без построения детализирующих управляющих иерархий.

3. На начальном этапе необходимо построить максимально обобщенную сеть кластеров (или компонентов) и их элементов, которая объединяет все управляющие критерии. При этом нужно найти наиболее удобную форму расположения кластеров и их элементов и ввести соответствующие обозначения. Для представления одних и тех кластеров и элементов для всех управляющих критериев следует использовать идентичные обозначения.
4. Из обобщенной сети выбрать кластеры, которые имеют отношение к каждому управляющему критерию или подкритерию, и установить между ними связи, соответствующие внешним и внутренним зависимостям (влияниям). Стрелка, направленная от одного кластера к другому, показывает, что все или некоторые элементы второго кластера влияют на элементы первого.
5. Определить подход, который вы предпочитаете при анализе кластеров или элементов: рассматривать активное влияние одного кластера (элемента) на другие кластеры (элементы) относительно заданного критерия или анализировать кластеры (элементы), подверженные влиянию других кластеров (элементов). Смысл и направление влияния следует сохранять одинаковым для всех критериев из управляющих иерархий (выгод, возможностей, издержек и рисков).
6. Для каждого управляющего критерия построить суперматрицу, последовательно разместив все кластеры и содержащиеся в них элементы сверху вниз по вертикали и слева направо по горизонтали. Записать в соответствующие позиции суперматрицы векторы приоритетов, полученные из парных сравнений, как подстолбцы (блоки) соответствующих столбцов суперматрицы.
7. Выполнить парные сравнения элементов кластеров, определяя их влияние на элементы в других кластерах, с которыми они связаны (внешняя зависимость), или на элементы собственного кластера (внутренняя зависимость). В процессе сравнений следует всегда помнить о смысле управляющего критерия, по которому они проводятся. В парных сравнениях определяется, какой из двух элементов сильнее влияет на заданный элемент и насколько сильнее.Провести парные сравнения кластеров по критериям управляющей иерархии. Полученные веса используются в качестве весовых коэффициентов для элементов соответствующих блоков суперматрицы. Весовой коэффициент приравнивается к нулю, если кластер не оказывает влияния на другие кластеры. В результате умножения суперматрицы на весовые коэффициенты кластеров получается взвешенная суперматрица, стохастическая по столбцам.
8. Вычислить предельные приоритеты стохастической суперматрицы, используя соответствующие процедуры в зависимости от свойств матри-

цы (приводимая — неприводимая, примитивная — непримитивная, имеющая один или несколько корней характеристического уравнения). При этом возможны следующие ситуации: 1) все столбцы предельной суперматрицы идентичны, и каждый из них содержит относительные приоритеты всех элементов проблемы, из которых можно получить нормированные на единицу приоритеты элементов в каждом кластере; 2) при возведении матрицы в степени возникает цикличность ее форм. В этом случае предельные приоритеты различных форм усредняются и затем нормализуются для каждого кластера. Хотя векторы приоритетов всех элементов записываются в суперматрицу в нормированном виде, предельные приоритеты интерпретируются как идеализированные оценки, так как критерии управляющей иерархии не зависят от альтернатив.

9. Выполнить синтез предельных приоритетов, умножая каждый идеализированный предельный вектор на вес соответствующего управляющего критерия и суммируя полученные векторы для каждой из обобщенных категорий качества решения: *Выгоды* (*B*), *Возможности* (*O*), *Затраты* (*C*) и *Риски* (*R*). После этого получим четыре вектора, соответствующих обобщенным показателям качества. Окончательный результат, характеризующий качество решения в целом, формируется как отношение BO/CR из значений четырех векторов для каждой альтернативы. Альтернатива, имеющая максимальное значение отношения, считается лучшей. Этот тип синтеза предпочитают многие индивидуумы и компании, располагающие ограниченными ресурсами.

10. Правительства предпочитают другой способ синтеза результата, в котором определяются стратегические критерии и их приоритеты, используемые для оценивания выгод, возможностей, издержек и рисков. Полученные четыре оценки нормализуются и используются для вычисления вектора глобальных приоритетов альтернатив из четырех векторов. Для каждой альтернативы приоритеты издержек и рисков вычитаются из суммы приоритетов выгод и возможностей. Альтернативным способом является суммирование взвешенных обратных величин издержек и рисков с оценками выгод и возможностей. Кроме того, можно суммировать взвешенные приоритеты по всем категориям качества, беря для издержек и рисков оценки, полученные путем вычитания их приоритетов из единицы. В целом, синтез можно проводить четырьмя различными способами.

11. Провести анализ чувствительности глобальных приоритетов и интерпретировать его результаты в смысле устойчивости окончательных значений к изменению значений приоритетов критериев и альтернатив. Особенный интерес представляют случаи изменения порядка ранжирования альтернатив. Анализ чувствительности позволяет установить, когда и почему это может произойти.

Глава 6

Вероятность, теория Байеса и аналитические сети

6-1. Введение. Диагнозы с зависимыми симптомами. Теорема Байеса

В этой главе мы выдвигаем смелое предположение о том, что теория вероятностей является способом обработки гипотез о влияниях в условиях неопределенности и, следовательно, ее методы и вычисления могут быть реализованы в МАС. Мы пришли к этому выводу после того, как к нам обратились врачи из известной клиники, осознавшие необходимость изменения подхода к диагностике, основанного на теории Байеса. Эти люди были преданы суду после смерти пациента, наступившей в результате их действий, предпринятых в соответствии с байесовским подходом, в котором не уделялось должного внимания истории болезни несчастного пациента. Есть пословица: «нельзя судить о вкусе пудинга, не попробовав его», поэтому читатель должен сам сделать соответствующие выводы из этой главы. Один хорошо известный эксперт по теории Байеса сказал мне: «Если Вы сможете доказать, что теорема Байеса является частью МАС, тогда теорию вероятностей тоже можно считать частью МАС». Я попытался сделать это в настоящей главе, где пятый раздел представляет результаты исследований, проведенных мною совместно с Луисом Варгасом, которые были опубликованы в журнале «Исследование операций» в июле 1998 года [1] после обсуждения с многочисленными рецензентами в течение нескольких лет.

В медицинской диагностике экспертные суждения необходимы для того, чтобы определить, какие анализы и исследования нужно провести при имеющихся симптомах. Для многих болезней до сих пор не полностью известно, какую информацию нужно собрать о симптомах и какая комбинация признаков соответствует данной болезни. Даже при небольшом количестве симптомов (признаков) число экспериментов, необходимых для получения адекватных статистических данных, может оказаться слишком большим. Поэтому в диагностике используются обобщенные модели, которые включают как статистические данные, так и экспертные суждения. При наличии статистических данных и отсутствии экспертных суждений такая модель позволяет сделать краткосрочный прогноз заданных показателей на основе теоремы Байеса. Если кроме статистики в распоряжении врача имеются экспертные суждения, то следует комплексно использовать всю информацию, чтобы идентифицировать болезнь, которая в наибольшей степени соответствует наблюдаемым симптомам. Здесь мы можем использовать МАС, который позволяет обрабатывать зависимости между структурными элементами проблемы и дает возможность объединить статистическую и экспертную информацию. Мы покажем, что апостериорные вероятности, вычисляемые по формуле Байеса, согласуются с результатами МАИ/МАС, а также, что теорема Байеса является достаточным условием решения в смысле МАИ. Ниже приведена иллюстрация применения МАИ в медицинской диагностике на основе экспертных суждений, а также с одновременным использованием суждений и статистических данных. Этот подход позволяет обеспечить поддержку принятия решений в задачах диагностики, необходимую практикующим врачам, с которыми мы активно взаимодействовали при выполнении данной работы. При постановке диагноза мы имеем дело с множеством симптомов (следствий) и вероятных болезней (причин), которые далеко не всегда являются независимыми. Когда существует множество взаимозависимых признаков, задача определения диагноза, которому они соответствуют, усложняется. Во многих случаях наблюдаемые симптомы вызваны несколькими болезнями, протекающими одновременно, что затрудняет процесс лечения. Лечение основано на диагнозе (или диагнозах), правильность которого, в свою очередь, зависит от того, насколько верно врачи могут установить отношения между симптомами и болезнями. Рассмотрим следующий пример, взятый из практики.

История болезни

Женщина на втором триместре беременности обратилась к врачу с симптомами, свидетельствующими о патологии крови (анемия, снижение количества тромбоцитов, сгущение крови, повышенное тромбопластиновое время, отражающее ненормальность свертывания крови), патологии печени (признаки воспаления в печеночных пробах) и нарушении иммунитета (повышенное содержание антинуклеарных и антикардиолипиновых антител, свидетельствующее о присутствии аномальных антител вместо собственных клеточных структур пациента). На основании этих симптомов врачи рассматривали четыре возможных диагноза (волчанка; тромботическая тромбоцитопеническая пурпура; гемолиз, увеличение функциональной активности печени и тромбоцитопения; синдром антикардиолипиновых антител). При этом нужно было принять решение, следует ли прервать беременность для выздоровления пациентки. Результаты первичного обследования показали, что это сложное и трудное решение, зависящее от поставленного диагноза, необходимо принять в течение нескольких недель. Различные диагнозы приводят к разным стратегиям лечения, поэтому мы будем говорить о сочетаниях «болезнь — лечение». Термины, используемые в этом примере, будут описаны более подробно в шестом разделе данной главы.

Несмотря на развитие альтернативных подходов к медицинской диагностике, основанных на методах искусственного интеллекта и нейронных сетей, теорема Байеса до сих пор остается популярным статистическим подходом [2–6]. Поиск работ в области клинической медицины, выполненный в университете Питтсбурга в системе BRS/SEARCH за 1995 и 1996 годы, выдал 14 публикаций, использующих теорему Байеса, 44 работы с применением методов искусственного интеллекта и 29 публикаций, связанных с применением нейронных сетей. Теория Байеса [7, 8] обеспечивает парадигму для обновления диагностической информации, представленной в вероятностной форме. Это значит, что для принятия решений в условиях неопределенности необходимо привлекать дополнительную информацию об окружающей среде, в которой принимается решение. «Окружающей средой» являются знания врачей и медицинского сообщества, а также методы диагностики и лечения, которым они доверяют, так как успешно применяли их в прошлом, выводя известные диагнозы из наблюдаемых признаков. Теория Байеса преобразовывает информацию, связывая причины и следствия в терминах условных вероятностей. Полученные на ее основе выводы следуют из результатов экспериментов, поставленных для обнаружения причин. Применение условных вероятностей делает возможной замену начальных, или априорных, вероятностей причин, установленных на основе статистического анализа большой выборки населения, на апостериорные вероятности, используя при этом результаты анализов или тестов, выполненных для конкретного человека. Априорные вероятности задаются субъективно или эмпирически на основе частотного анализа появления причин в совокупности данных. Вычисление апостериорных вероятностей основано на априорных вероятностях, на результатах экспериментов и на оценках надежности этих экспериментов.

Одним из широко применяемых упрощающих допущений является допущение о взаимной независимости признаков. Однако оно редко подтверждается в реальной жизни. Некоторые авторы полагают, что допущение о независимости признаков не снижает качества диагностики [9–12].

Другие ученые подвергают сомнению корректность применения формулы Байеса. Джонсон [13], например, пишет следующее:

> *«Существуют ли в практике каждодневной диагностики основные условия для Байесовских вычислений? Может ли кто-то рекомендовать использовать статистический анализ решений для выбора методов обследования конкретного пациента в процессе диагностики?.. Различие между моделями и действительностью, проявляющееся в бессистемности клинических назначений, вызывает вопрос: обладают ли на самом деле диагностические гипотезы какой-нибудь вероятностью, сопоставимой с математическим понятием вероятности? Имеется дополнительное обстоятельство, которое вызывает сомнение в этом... В соответствии с распространенной частотной интерпретацией вероятности, вероятность того, что пациент с определенными результатами анализов болен некоторой болезнью, зависит от относительной частоты появления пациентов с такой совокупностью результатов анализов и от распределения болезней среди них... Сами по себе комбинации результатов анализов не позволяют нам оценить вероятность диагностической гипотезы».*

Причина, по которой допускается независимость признаков, кроется в обеспечении возможности оценки вероятности того, что пациент болен определенной болезнью или что болезнь выражается заданным набором симптомов, поскольку информация о симптомах и их комбинациях не является полной и может соответствовать многим болезням. В таком случае, применение теоремы Байеса будет корректным, если имеются статистические экспериментальные данные или экспертные знания, которые связывают симптомы с болезнями. Даже при небольшом количестве признаков число экспериментов, необходимых для получения адекватных статистических данных, может оказаться очень большим. При этом нужно будет обследовать пациентов, которые больны каждым из рассматриваемых заболеваний, а также тех, кто таких болезней не имеет. Кроме того, следует принимать во внимание факт, что каждый человек может иметь более одного заболевания. Количество экспериментов для сбора такой информации может стать астрономическим. Этот подход сводит проблемы диагностики к комбинаторным задачам и напоминает одну из компьютерных программ для игры в шахматы, в которой выделяются подпространства возможных ходов, и каждому ходу приписывается определенное значение вероятности на основе экспертных суждений. В медицинской диагностике суждения необходимы для определения того, какие виды обследования необходимо провести при заданных симптомах, и для того, чтобы по результатам обследования оценить, насколько один диагноз является более вероятным по сравнению с другим. Если такая информация отсутствует, то применение теоремы Байеса нельзя признать научно обоснованным.

Упрощенная форма теоремы Байеса дает значение апостериорной вероятности при допущении статистической независимости признаков, так как информация обо всех возможных комбинациях признаков обычно недоступна. Заметим, что предположение о независимости не обязательно ведет к уменьшению точности диагностики на основе теоремы Байеса. Гаммерман и Тэтчер [14] сравнили точность байесовской диагностики с использованием допущения о независимости и без него на выборке из 6000 пациентов с острой болью в животе. Они получили следующие оценки точности определения диагноза по набору заданных симптомов:

Диагноз:	***Точность***
Врач (предварительный диагноз)	76 %
Теорема Байеса с допущением о независимости	74 %
Теорема Байеса без допущения о независимости	65 %

Эти результаты показывают, что усложнение формального математического аппарата в задачах диагностики не приводит к более точным результатам. Для практического применения необходимы модели, которые включают как статистические данные, так и экспертные суждения врача о конкретном пациенте, учитывающие историю его болезни. Желаемая модель должна иметь такой уровень обобщения, который позволит объяснять и статистические выводы, и выводы на основе суждений. Это подразумевает, что подобная модель должна базироваться на универсальной теории измерений, которая способна обрабатывать и объединять статистические данные и экспертные суждения. В принципе, шкалы отношений, выведенные на основе сравнений статистических данных, можно рассматривать как хорошо обоснованные суждения, которые применяются для обработки содержащейся в статистике информации. Следовательно, статистику и суждения можно объединить, используя общую для них шкалу отношений. Именно такой способ обработки информации применяется для анализа многокритериальных решений в МАИ/МАС.

МАС предоставляет средства для обработки зависимостей между элементами и компонентами проблемы, что позволяет объединить статистические и логические (экспертные) результаты. Прежде чем применить МАС для решения описанной выше задачи, мы обсудим некоторые теоретические аспекты, касающиеся связи теоремы Байеса с моделями МАС. Затем мы рассмотрим на примере, как с помощью МАИ/МАС можно решать задачи медицинской диагностики на основе экспертных суждений. Простой пример проиллюстрирует совместное использование статистических данных и экспертных суждений для решения задач диагностики, с которыми приходится сталкиваться практикующим врачам. Наша цель заключается в вычислении приоритетов, которые соответствуют вероятностям в теореме Байеса, чтобы затем получить из них матрицу относительных предпочтений для пар «болезнь — лечение».

6-2. Метод анализа иерархий

Метод анализа иерархий [15–17] предназначен для многокритериального принятия решений. Он базируется на трех принципах: *Декомпозиция*, *Измерение предпочтений* и *Синтез приоритетов*. Декомпозиция позволяет представить проблему с помощью множества взаимосвязанных элементов, каждый из которых рассматривается отдельно. Обобщенное представление цели детализируется описаниями критериев (состояний природы), в терминах которых оцениваются решения. Результатом декомпозиции является многоуровневая иерархическая структура, где однородные элементы сгруппированы в уровни (компоненты) таким образом, чтобы их можно было оценить по важности или влиянию относительно элементов смежных уровней. Измерение элементов выполняется с использованием шкалы отношений, которая получается из парных сравнений элементов одного уровня иерархии относительно влияния элементов вышерасположенного иерархического уровня. В парных сравнениях используются вербальные суждения о степени доминирования (важности или вероятности) одного элемента над другим, которые представлены цифрами из абсолютной шкалы измерений. Эти суждения записываются в матрицу, для которой вычисляется вектор локальных приоритетов, показывающий предпочтительность сравниваемых элементов в шкале отношений. После вычисления всех векторов локальных приоритетов в иерархии необходимо осуществить синтез локальных приоритетов, чтобы получить вектор глобальных приоритетов, который используется для выбора лучшей или более вероятной альтернативы. Глобальные приоритеты получаются путем последовательного перемножения и сложения локальных приоритетов элементов сверху вниз по иерархии. Результатом синтеза является мультилинейная (т. е. нелинейная) форма, сложность которой зависит от количества элементов на каждом уровне и от числа уровней в иерархии.

МАИ может применяться в контексте теоремы Байеса, т. е. для связи априорных вероятностей причин с вероятностями результатов эксперимента (исходов). Рассмотрим трехуровневую иерархию, включающую цель, состояния природы (Θ) и результаты эксперимента (X). Пусть $P(\Theta)$ — вектор-столбец априорных вероятностей и пусть $P(\Theta)$ совпадает с приоритетами состояний природы относительно цели. Пусть $P(X|\Theta)$ — матрица условных вероятностей, которая совпадает с приоритетами элементов третьего уровня (исходов) относительно состояний природы. Тогда глобальные приоритеты, вычисленные путем иерархической композиции, можно представить в виде:

$$P(X) = P(X \mid \Theta)P(\Theta) .$$

Эта формула совпадает с формулой для вычисления вероятностей исходов X по правилам теории вероятности. Теперь нам необходим способ представления взаимосвязи причин (состояний природы) Θ и следствий (исходов) X, который можно обобщить на случай взаимной зависимости между исходами. Самый простой способ — инвертировать иерархию (перевернуть сверху вниз) и оценить состояния природы в терминах исходов, а цель — в терминах состояний природы.

6-3. Аналитические сети: построение суперматрицы

Для вычисления приоритетов в системе с взаимозависимыми элементами и обратной связью используется обобщение МАИ — метод аналитических сетей [17]. В сетевых структурах элементы системы представлены узлами, а дуги между ними соответствуют наличию взаимодействия и/или влияния. Процедура вычисления глобальных приоритетов сводится к построению суперматрицы, в столбцы которой записываются локальные векторы приоритетов. Возведение суперматрицы в предельные целочисленные степени дает оценку совокупного (нелинейного) влияния каждого элемента на все остальные элементы, с которыми он взаимодействует. Матричное представление трехуровневой иерархии имеет вид:

$$W = \begin{array}{r} \\ \textit{Цель}\,(G) \\ \textit{Критерии}\,(C) \\ \textit{Альтернативы}\,(A) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G & C & A \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ W_{21} & 0 & 0 \\ 0 & W_{32} & I \end{array} \right\| \end{array},$$

где W_{21} и W_{32} — матрицы-блоки. Фактически, W_{21} — это вектор, который представляет воздействие цели на критерии, а W_{32} — матрица, содержащая приоритеты воздействия критериев на каждую из альтернатив. W называется суперматрицей, потому что ее элементами являются матрицы. Под воздействием мы подразумеваем меру, в какой элементы нижележащих уровней удовлетворяют неявным требованиям элементов ближайшего верхнего уровня, например насколько альтернативы удовлетворяют требованиям критериев или какой вклад критерии вносят в цель. Если критерии зависят друг от друга, то матрица W_{22} будет ненулевой, т. е. суперматрица примет вид:

$$W = \left\| \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ W_{21} & W_{22} & 0 \\ 0 & W_{32} & I \end{array} \right\| .$$

Структура такой модели показана на рис. 6-1, где стрелки обозначают вклад элементов компонента (например, критериев) в элементы этого же или другого компонента (например, в альтернативы). Воздействие или влияние в отношении некоторого свойства является базовым понятием МАС. Все сравнения выполняются в контексте влияния или воздействия, т. е. в рассматриваемой паре определяется элемент, оказывающий большее влияние (воздействие). Возможен альтернативный способ, когда эксперты сравнивают элементы, отвечая на вопросы: на какой из двух сравниваемых элементов внешний элемент (свойство) влияет сильнее? При формировании суждений о зависимости между двумя компонентами для каждого элемента одного компонента выполняются парные сравнения элементов другого компонента по силе воздействия на данный элемент. Например, если один компонент включает болезни, а другой — симптомы, то для каждой болезни перебираются все пары симптомов и формируются суждения путем ответа на вопрос: какой из двух симптомов является более характерным для данной болезни и насколько более характерным по сравнению с другим? Точно так же проводятся парные сравнения болезней (диагнозов) относительно симптомов. При этом задается вопрос: для какой из двух болезней более вероятен данный симптом? Для матриц парных сравнений вычисляются векторы приоритетов, которые записываются в соответствующие блоки суперматрицы. Преимуществом МАИ является то, что вопросы, задаваемые экспертам, недвусмысленны и хорошо понятны.

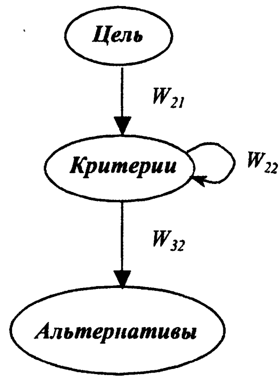


Рис. 6-1. Иерархия с взаимозависимыми критериями

Известно, что в стохастической по столбцам матрице W для выявления всех взаимодействий между элементами в системе достаточно вычислить $\lim_{k\to\infty} W^k$. Если матрица W является неприводимой и примитивной, то она имеет единственный предел, и, кроме того, существует вектор w^∞, для которого $W^\infty = w^\infty e^T$, где $e^T = (1, \ldots, 1)$. Однако если матрица W является приводимой, то необходимо определить кратность n_1 главного собственного значения $\lambda_{\max} = 1$. Например, при $n_1 = 1$ значение W^∞ определяется по формуле: $W^\infty = (I - W)^{-1}\psi(1)/\psi'(1)$, где $\psi(1)$ — минимальный характеристический полином для W, а $\psi'(1)$ — его первая производная по λ. Решение для случая $n_1 > 1$ приведено в [17, 18]. Для модели на рис. 6-1 при $n_1 = 1$ получим:

$$W^{\infty} = \lim_{k \to \infty} \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ W_{22}^{k} W_{21} & W_{22}^{k} & 0 \\ W_{32} \left(\sum_{h=0}^{k-2} W_{22}^{h} \right) W_{21} & W_{32} \left(\sum_{h=0}^{k-1} W_{22}^{h} \right) & I \end{matrix} \right\| .$$

Если $|W_{22}| < 1$, то $(W_{22})^k$ будет стремиться к нулю при $k \to \infty$, и тогда

$$W^{\infty} = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ W_{32}(I - W_{22})^{-1} W_{21} & W_{32}(I - W_{22})^{-1} & I \end{matrix} \right\| .$$

Таким образом, воздействие цели на ранжирование альтернатив (т. е. способность альтернатив удовлетворять цели) выражается блоком W_{31} предельной суперматрицы W^{∞}. Следует отметить, что рассмотренная здесь постановка задачи является частным случаем МАС, который неоднократно применялся для принятия сложных решений с взаимной зависимостью между элементами [17, 19, 20].

6-4. Теорема Байеса и суперматрица

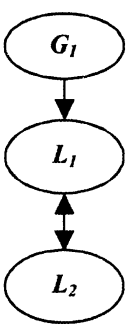


Рис. 6-2. Сеть, иллюстрирующая теорему Байеса

Рассмотрим сеть на рис. 6-2, которая содержит три узла. Пусть $P_1 = P(L_1)$ — вектор-столбец приоритетов воздействия или влияния узла G_1 на узел L_1, и пусть $P_{21} = P(L_2|L_1)$ — стохастическая по столбцам матрица воздействия узла L_1 на узел L_2. Допустим, что $P_{12} = P(L_1|L_2)$ — стохастическая по столбцам матрица воздействия элементов узла L_2 на элементы узла L_1. В контексте теоремы Байеса элементы матрицы P_{21} соответствуют условным вероятностям, а элементы вектора P_1 — априорным вероятностям. Теорема Байеса требует определения матрицы P_{12} как функции от P_1 и P_{21}. В МАС мы используем P_1, P_{12} и P_{21} для нахождения вектора предельных приоритетов элементов сети. Следовательно, необходимо убедиться, что вектор предельных приоритетов элементов уровня L_1 совпадает с вектором P_1 с точностью до постоянного положительного множителя.

Суперматрица сети, представленной на рис. 6-2, имеет вид:

$$W = \begin{array}{c} \\ G_1 \\ L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} G_1 & L_1 & L_2 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ P_1 & 0 & P_{12} \\ 0 & P_{21} & 0 \end{Vmatrix} \end{array}. \tag{1}$$

Теорема 6-1. Для стохастической матрицы W, определенной в (1), существуют два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, единственные с точностью до положительного действительного множителя, которые удовлетворяют равенствам

$$P_{12}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \quad \text{и} \quad P_{21}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \tag{2}$$

и являются главными правыми собственными векторами матриц $(P_{12}P_{21})$ и $(P_{21}P_{12})$ соответственно.

Доказательство: Для циклической стохастической матрицы W с двумя циклами значения предельных приоритетов воздействия равны

$$W^\infty = \frac{1}{2}(I+W)(W^2)^\infty, \tag{3}$$

где $(W^2)^k = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (P_{12}P_{21})^k & 0 \\ (P_{21}P_{12})^{k-1}P_{21}P_1 & 0 & (P_{21}P_{12})^k \end{Vmatrix}.$

$$W^\infty = \frac{1}{2}\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ P_{12}BP_{21}P_1 & A & P_{12}B \\ BP_{21}P_1 & P_{21}A & B \end{Vmatrix}, \tag{4}$$

$$A = \lim_{k\to\infty}(P_{12}P_{21})^k \quad \text{и} \quad B = \lim_{k\to\infty}(P_{21}P_{12})^k. \tag{5}$$

Так как $(P_{12}P_{21})$ и $(P_{21}P_{12})$ являются неприводимыми и примитивными матрицами, что вытекает из способа их построения, принятого в МАИ, то из этого следует, что все столбцы матриц A и B идентичны. Тогда, обозначив единичные векторы-строки размерности n и m через $\boldsymbol{e}_n^T = (1, \ldots, 1)$ и $\boldsymbol{e}_m^T = (1, \ldots, 1)$ соответственно, получим:

$$A = \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_n^T \quad \text{и} \quad B = \boldsymbol{b}\boldsymbol{e}_m^T,$$

где $\boldsymbol{a} = (a_1, \dots, a_n)^T$ и $\boldsymbol{b} = (b_1, \dots, b_m)^T$.

Из (5) следует, что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ являются главными правыми собственными векторами матриц $(P_{12}P_{21})$ и $(P_{21}P_{12})$ соответственно. Оба этих вектора являются единственными с точностью до положительного действительного множителя.

Чтобы показать, что $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ удовлетворяют соотношениям (2), умножим обе стороны равенства $(P_{12}P_{21})\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}$ на P_2 слева, в результате получим $(P_{21}P_{12})P_{21}\boldsymbol{a} = P_{21}\boldsymbol{a}$. В выражении $(P_{21}P_{12})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$ вектор $\boldsymbol{b}$ является единственным с точностью до положительной константы, и поскольку в МАИ он представляет собой нормированный на единицу вектор, то справедливо равенство $P_{21}\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. Аналогично можно доказать $P_{12}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.

Заметим, что систему уравнений (2) можно представить в виде задачи о собственном векторе:

$$\begin{Vmatrix} 0 & P_{12} \\ P_{21} & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix}. \tag{6}$$

Пусть $P_2 = P_{21}P_1$ — вероятность исходов в формуле Байеса. Значение P_2 должно совпадать с вектором предельных приоритетов уровня L_2 (см. рис. 6-2). Так как мы хотим выразить P_1 и P_2 через предельные значения приоритетов элементов сети, представленной на рис. 6-2, мы должны приравнять векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ к P_1 и P_2 соответственно.

Теорема 6-2 (Теорема существования). Для сетевой структуры (см. рис. 6-2), представленной стохастической суперматрицей (1), и для заданных матриц P_1 и P_{21} существует матрица P_{12}, которая удовлетворяет условиям:

$$(P_{12}P_{21})P_1 = P_1 \quad \text{и} \quad (P_{21}P_{12})P_2 = P_2, \tag{7}$$

где $P_2 \equiv P_{21}P_1$.

Доказательство: Если $P_{12} = (\Delta P_1)P_{21}^T(\Delta P_2)^{-1}$,

где $\Delta P_1 = \begin{Vmatrix} p_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{1n} \end{Vmatrix}$ и $\Delta P_2 = \begin{Vmatrix} p_{21} & \cdots & 0 \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & p_{2m} \end{Vmatrix}$, то, умножив обе стороны равенства на $(\Delta P_2)\boldsymbol{e_m}$ справа, получим:

$$P_{12}(\Delta P_2)\boldsymbol{e_m} = (\Delta P_1)P_{21}{}^T\boldsymbol{e_m} \text{ или } P_{12}P_2 = (\Delta P_1)P_{21}{}^T\boldsymbol{e_m}.$$

Аналогично, транспонируя P_{12} и умножая обе части на ΔP_2 слева, а на $\boldsymbol{e_n}$ справа, будем иметь:

$$(\Delta P_2)P_{12}{}^T\boldsymbol{e_n} = P_{21}(\Delta P_1)\boldsymbol{e_n}.$$

Из соотношений $\begin{Vmatrix} 0 & P_{21}^T \\ P_{12}^T & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_n} \\ \boldsymbol{e_m} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_n} \\ \boldsymbol{e_m} \end{vmatrix}$ и $P_{12}P_2 = (\Delta P_1)\boldsymbol{e_n} = P_1$ следует $P_{21}P_1 = (\Delta P_2)\boldsymbol{e_m} = P_2$ и справедливость равенств (7).

Матрица P_{12} может быть неединственной.

Тогда $\begin{Vmatrix} 0 & Q \\ P_{21} & 0 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} P_1 \\ P_2 \end{vmatrix}$, где $Q \neq (\Delta P_1)P_{21}{}^T(\Delta P_2)^{-1}$.

Из соотношений $QP_2 = P_1$, $P_{12}P_2 = P_1$ и $P_{21}P_1 = P_2$ получим:

$$(P_{21}Q)P_2 = (P_{21}P_{12})P_2 \text{ или } P_{21}(Q - P_{12})P_2 = 0.$$

Любая матрица Q, удовлетворяющая условию $P_{21}(Q - P_{12})P_2 = 0$, будет давать предельные приоритеты элементов соответствующей сети, которые описываются вектором $(0, P_1, P_2)^T$.

Заметим, что $Q = P_{12}$ соответствует решению по теореме Байеса. Другими словами, теорему Байеса можно считать частным случаем зависимости и обратной связи, представленной в суперматрице. Этот факт говорит о том, что между компонентами L_2 и L_1 могут существовать другие виды взаимодействия, а не только те, которые учитываются теоремой Байеса. Это вполне естественно для теории, имеющей дело с синтезом суждений, которые не всегда связаны с вероятностями. Теория МАС базируется на понятии доминирования, которое может отражать важность, предпочтение и вероятность. Например, если $P_1 = (0.1, 0.9)^{\mathrm{T}}$ и $P_{21} = \begin{Vmatrix} 0.99 & 0.05 \\ 0.01 & 0.95 \end{Vmatrix}$, то $P_2 = (0.144,\ 0.856)^{\mathrm{T}}$ и $P_{12} = \begin{Vmatrix} 0.6875 & 0.0012 \\ 0.3125 & 0.9988 \end{Vmatrix}$. Однако любая матрица Q, удовлетворяющая условию $P_{21}(Q - P_{12})P_2 = 0$, даст такие же значения предельных приоритетов, как матрица P_{12} для сети, показанной на рис. 6-2. Например, для матрицы $Q = \begin{Vmatrix} 0.01 & 0.1151 \\ 0.99 & 0.8849 \end{Vmatrix}$ главные правые собственные векторы (QP_{21}) и $(P_{21}Q)$ будут совпадать с векторами $P_1 = (0.1,\ 0.9)^{\mathrm{T}}$ и $P_2 = (0.144,\ 0.856)^{\mathrm{T}}$ соответственно. Заметим, что интерпретация значений, записанных в первых столбцах матриц Q и

P_{21}, приводит к разным заключениям. Следовательно, существует не единственная матрица апостериорных вероятностей P_{12}, а несколько матриц, которые могут от нее отличаться. Вероятности результатов эксперимента P_2 можно получить, вычислив предельные приоритеты этих матриц. Если существует несколько матриц, которые в пределе приводят к одинаковым результатам, то почему для принятия решений мы должны использовать именно матрицу апостериорных вероятностей Байеса, а не другие альтернативные способы? Мы ответим на этот вопрос в шестом разделе данной главы после того, как покажем, что в МАС формула Байеса является одним из многих возможных подходов к принятию решения, которое получается на основе предельной суперматрицы приоритетов.

6-5. Отношения между теоремой Байеса и МАИ

Предположим, что $L_1 \equiv \theta = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n\}$ — пространство состояний природы (например, последствия некоторых действий) и $L_2 \equiv X = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ — случайная выборка наблюдений из этого пространства. Пусть $P_{12} \equiv P(\theta|X) = P(\theta_i|X = x_j)$ является стохастической по столбцам матрицей апостериорных вероятностей размерности $n \times m$, и пусть $P_{21} \equiv P(X|\theta) = P(X = x_j|\theta_i)$ — стохастическая по столбцам матрица условных вероятностей размерности $m \times n$, а $P_1 \equiv P(\theta)$ — вектор априорных вероятностей размерности n.

Пусть $P_1 = P(\theta)$, $P_2 = P(X)$ и $P_2 = P_{21}P_1$. Если

$$P_{12} \equiv P(\theta \mid X) = \Delta P(\theta) P(X \mid \theta)^T \Delta P(X)^{-1}, \tag{8}$$

где $\Delta P(\theta) = \begin{Vmatrix} P(\theta_1) & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \cdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & P(\theta_n) \end{Vmatrix}$ и $\Delta P(X) = \begin{Vmatrix} P(X=x_1) & 0 \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots \cdots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & P(X=x_n) \end{Vmatrix}$, то в соответствии с теоремой 6-1 $(0, P(\theta), P(X))^{\mathrm{T}}$ — вектор предельных приоритетов сети, показанной на рис. 6-2. Теорема Байеса является достаточным, но не необходимым условием того, чтобы предельные приоритеты этой сети совпадали с компонентами вектора $(0, P(\theta), P(X))^{\mathrm{T}}$.

Выражение (8) является представлением теоремы Байеса в матричной форме:

$$P(\theta_i \mid X = x_j) = \frac{P(X = x_j \mid \theta_i)P(\theta_i)}{P(X = x_j)} = \frac{P(X = x_j \mid \theta_i)P(\theta_i)}{\sum_{j=1}^{m} P(X = x_j \mid \theta_i)P(\theta_i)}.$$

Как и теорема Байеса, приведенные выше соображения легко обобщаются на случай иерархии.

Заметим, что предположение $P(X) = P(X|\theta)P(\theta)$ является следствием из определения условной вероятности:

$$P(X \mid \theta) = \frac{P(X \cap \theta)}{P(\theta)}.$$

Формула условной вероятности лежит в основе теоремы Байеса, а теорема 6-1 выводится из сетевой модели, описывающей взаимодействия (потоки влияния) между узлами и, следовательно, никак не зависит от понятия условной вероятности. Следующий ниже пример иллюстрирует отношения между МАИ/МАС и теоремой Байеса.

Элементарный пример. Рассмотрим задачу, которая была описана в журнале *Economist* от 4 июля 1992 года, с. 74: «Если тест на обнаружение болезни, распространенность которой составляет 1/1000, имеет ложноположительную (ложноотрицательную) оценку 5 %, то каковы шансы того, что человек с таким результатом теста действительно болен этой болезнью, при условии, что информация о симптомах для данного пациента отсутствует?» Суперматрица этой задачи имеет вид:

$$W = \begin{array}{r} \\ \textit{Решение}\ (G) \\ \textit{Болен}\ (D) \\ \textit{Не болен}\ (ND) \\ \textit{Тест}\ (+) \\ \textit{Тест}\ (-) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} G & D & ND & (+) & (-) \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0 & 0 & P(\theta_1|x_1) & P(\theta_1|x_2) \\ 0.999 & 0 & 0 & P(\theta_2|x_1) & P(\theta_2|x_2) \\ 0 & 0.95 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.95 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array},$$

где $P(X \mid \theta)P(\theta) = \begin{Vmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.05 & 0.95 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.001 \\ 0.999 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.0509 \\ 0.9491 \end{vmatrix}$ — вероятность результатов теста, т. е. $P(+) = 0.0509$ и $P(-) = 0.9491$.

Чтобы определить вероятность того, что человек с положительным тестом действительно болен, мы должны вычислить матрицу $P(\theta \mid X) = \begin{Vmatrix} P(\theta_1 \mid x_1) & P(\theta_1 \mid x_2) \\ P(\theta_2 \mid x_1) & P(\theta_2 \mid x_2) \end{Vmatrix}$. Таким образом, проблема сводится к вычислению предела суперматрицы W:

$$W^k = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0 & 0 & P(\theta_1 \mid x_1) & P(\theta_1 \mid x_2) \\ 0.999 & 0 & 0 & P(\theta_2 \mid x_1) & P(\theta_2 \mid x_2) \\ 0 & 0.95 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0.05 & 0.95 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|^k \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 & 0.001 \\ 0.999 & 0.999 & 0.999 & 0.999 & 0.999 \\ 0.0509 & 0.0509 & 0.0509 & 0.0509 & 0.0509 \\ 0.9491 & 0.9491 & 0.9491 & 0.9491 & 0.9491 \end{matrix} \right\|.$$

При возведении суперматрицы W в целочисленные степени получаются предельные вероятности на основе векторов априорной вероятности, векторов вероятностей результатов эксперимента и матрицы $P(\theta|X)$. Столбцы исходной суперматрицы нормируются на единицу, чтобы матрица стала стохастической по столбцам.

В соответствии с теоремой 6-2 мы будем иметь:

$$P(\theta \mid X) = \Delta P(\theta) P(X \mid \theta)^T \Delta P(X)^{-1} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} 0.001 & 0 \\ 0 & 0.999 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.05 & 0.95 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} 1/0.0509 & 0 \\ 0 & 1/0.9491 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0.01866 & 0.00005 \\ 0.98134 & 0.99995 \end{matrix} \right\|.$$

Элемент (1, 1) матрицы $P(\theta|X)$ соответствует искомой вероятности, которая равна 0.01866. Таким образом, мы получили известный результат на основе более общего подхода, который базируется на шкалах отношений, используемых в принятии решений. Для вычислений в шкалах отношений, как и в теории вероятностей, можно применять определенные арифметические операции. Кроме того, вероятности и теорема Байеса могут быть представлены с помощью приоритетов.

Приведенный пример иллюстрирует, как сетевая модель может воспроизводить результаты вычислений по формуле Байеса в самом простом случае, где присутствует только один симптом как доказательство очевидности. Этот подход можно распространить на множество симптомов (признаков). При этом возникают две проблемы. Первая связана с множеством комбинаций признаков, для которых необходимо иметь статистические данные о вероятностях их существования. Такие данные достаточно трудно получить в обычной практике. Вторая проблема относится к точности и надежности этих данных.

6-6. За рамками теоремы Байеса

Модель, учитывающая зависимости между признаками, которая наряду со статистическими данными включает причинно-следственные отношения, вероятно, будет давать более правдоподобные результаты по сравнению с моделью, основанной исключительно на статистических данных, так как она предоставляет больше возможностей для учета разнообразной информации. Надежность этой информации зависит от знаний высококвалифицированных врачей, к которым обращаются в тех случаях, когда трудно поставить диагноз. Один из главных аспектов МАИ/МАС связан с представлением экспертных суждений с помощью надежного математического аппарата. Структура простейшей сетевой модели для выявления наиболее вероятного диагноза по симптомам пациента показана на рис. 6-3.

Для вычисления предельных приоритетов элементов сети, показанной на рис. 6-3, используется следующая суперматрица:

$$W = \begin{array}{r} \\ \textit{Диагноз} \\ \textit{Симптом} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \textit{Диагноз} & \textit{Симптом} \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cc} 0 & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{array} \right\| \end{array} . \qquad (9)$$

Приоритеты, записанные в матрице-блоке W_{12}, указывают на наиболее вероятный диагноз, которому соответствуют наблюдаемые симптомы. На уровне симптомов в матрице W_{21} записаны приоритеты, показывающие, какой симптом является более характерным для данной болезни (диагноза). Другими словами, W_{12} представляет вероятности болезней, вызывающих данный симптом, а W_{21} — матрица относительной важности (характерности) симптомов для рассматриваемых диагнозов (болезней). Обе матрицы W_{12} и W_{21} могут быть построены либо на основе статистических

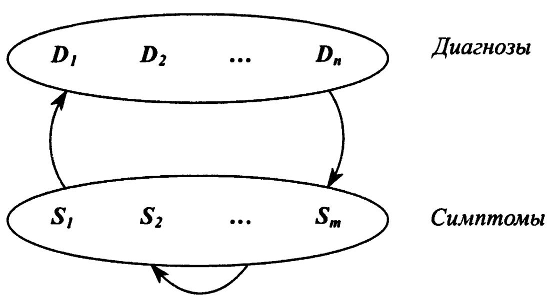


Рис. 6-3. Сеть «диагнозы — симптомы»

данных, либо на основе экспертных суждений (табл. 6-1 и 6-2). Если используется статистика, то W_{12} соответствует апостериорным вероятностям, вычисленным для W_{21}.

Матрица W_{22} показывает взаимные связи между симптомами, представленные экспертными суждениями. С точки зрения теории вероятностей, элементы W_{22} можно интерпретировать как вероятности того, что при наличии данного симптома будут иметь место другие симптомы. В этой задаче мы рассматриваем не все симптомы, которые возможны для данной болезни, а только те, которые обнаружены у конкретного пациента. Обработка суперматрицы W позволяет определить приоритеты или вероятности рассматриваемых диагнозов при заданном наборе симптомов. Матрицы W_{12} и W_{22} являются стохастическими по столбцам, следовательно, столбцы суперматрицы W не будут стохастическими. Чтобы преобразовать ее к нужной форме, нужно определить приоритеты взаимного влияния компонентов, которые будут использоваться в качестве весовых коэффициентов. В общем случае для выявления взаимного влияния среди компонентов (кластеров) необходимо осуществить парные сравнения компонентов (в данном случае *Диагнозов* и *Симптомов*), отвечая на вопрос: какой из двух сравниваемых компонентов имеет большее влияние на заданный третий компонент? Пусть α_1 — весовой коэффициент важности компонента диагнозов относительно симптомов и α_2 — весовой коэффициент взаимной важности симптомов. Отношение $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ показывает, насколько сильнее диагнозы влияют на симптомы по сравнению с взаимным влиянием симптомов. Значения этих коэффициентов определяются по результатам ответов на вопрос: являются ли знания о симптоме и его интенсивности достаточными для идентификации болезни, или для этого необходимы знания о других симптомах? Если при ответе на этот вопрос эксперты считают обе категории информации одинаково важными, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$. Вспомним сравнение отраслей промышленности, когда мы задавали вопрос: насколько сильнее электроэнергетика влияет на производство электроэнергии по сравнению с другой отраслью топливно-энергетического комплекса, например нефтедобычей? Там мы поставили низкую (обратную) оценку предпочтения, потому что электроэнергетика достаточно сильно зависит от таких ресурсов, как уголь, газ и мазут.

Так как суперматрица W является неприводимой, то взвешенная суперматрица также будет неприводимой, поэтому предельные приоритеты можно получить из решения задачи о собственном значении:

$$\begin{Vmatrix} 0 & \alpha_1 W_{12} \\ W_{21} & \alpha_2 W_{22} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}. \qquad (10)$$

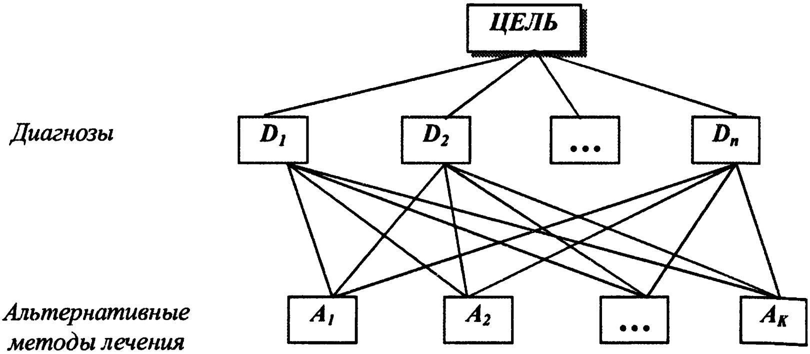


Рис. 6-4. Иерархия для выбора методов лечения

Решением этой задачи является вектор, содержащий компоненты $\boldsymbol{w}_2 = \left[\lim\limits_{k\to\infty}(\alpha_1 W_{21}W_{12}+\alpha_2 W_{22})^k\right]\boldsymbol{e}$, где $\boldsymbol{e} = (1, \ldots, 1)^T$, и $\boldsymbol{w}_1 = \alpha_1 W_{12}\boldsymbol{w}_2$.

Заметим, что, если $W_{22} = 0$, т. е. не существует зависимостей между симптомами, то $\boldsymbol{w}_1$ представляет собой вектор априорных вероятностей диагнозов в формуле Байеса, а $\boldsymbol{w}_2$ соответствует вектору вероятностей симптомов.

Результат, который дает МАС, — набор приоритетов (или вероятностей) всех элементов исследуемой проблемы. В данном случае это вектор предельных приоритетов $\begin{vmatrix} \boldsymbol{w}_1 \\ \boldsymbol{w}_2 \end{vmatrix}$, которые затем можно использовать для выбора метода лечения наиболее вероятной болезни с наблюдаемыми симптомами.

Существует два способа, позволяющих определить, какой из методов лечения является наиболее подходящим для наблюдаемых симптомов. В первом, менее интересном для нас способе, предполагается, что вероятности диагнозов известны. Этот случай можно представить иерархией на рис. 6-4.

Если через $w(A|D)$ обозначить матрицу относительной важности альтернативных методов лечения каждой болезни, то приоритеты методов лечения можно выразить как $w(A\,|\,D)\dfrac{\boldsymbol{w}_1}{\|w_1\|}$, где $\|w_1\| = \boldsymbol{e}^T\boldsymbol{w}_1$, $\boldsymbol{e}^T = (1, \ldots, 1)$.

Столбцы матрицы $w(A|D)$ содержат приоритеты, полученные путем обработки иерархий критериев и альтернатив, построенных для выявления лучших методов лечения для каждой болезни. Критерии для выбора методов лечения формулируют опытные врачи.

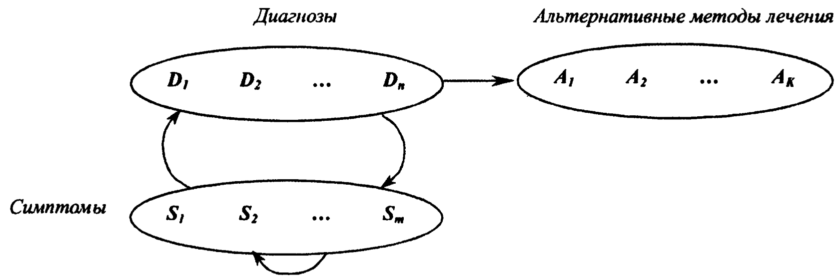


Рис. 6-5. Сетевая модель для выбора метода лечения

Второй, более общий способ выбора наилучшего метода лечения, наряду с диагнозами и методами лечения включает в рассмотрение анализ симптомов. Этот подход можно представить сетевой моделью, показанной на рис. 6-5.

Суперматрица сети, приведенной на рис. 6-5, имеет вид:

$$W = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} D & S & A \end{array} \\ \begin{array}{c} D \\ S \\ A \end{array} & \left\| \begin{array}{ccc} 0 & \alpha_1 W_{12} & 0 \\ \beta_1 W_{21} & \alpha_2 W_{22} & 0 \\ \beta_2 W_{31} & 0 & I \end{array} \right\| \end{array}.$$

Пусть матрица $Q = \left\| \begin{array}{cc} 0 & \alpha_1 W_{12} \\ W_{21} & \alpha_2 W_{22} \end{array} \right\|$. Предельные приоритеты ненулевых элементов исследуемой сети в устойчивом состоянии будут равны $[W_{31}, 0]Q^{\infty}$.

Приоритеты альтернатив совпадают с результатами, полученными для иерархии на рис. 6-4, потому что $W_{31} = w(A|D)$, а все столбцы матрицы Q^{∞} идентичны вектору $\left| \begin{array}{c} w_1 \\ w_2 \end{array} \right|$, компоненты которого определяются из уравнения (10).

Теперь рассмотрим применение МАС для решения более сложной задачи медицинской диагностики, которая была описана в начале данной главы. Мы попросили лечащего врача высказать свои экспертные суждения об относительной важности или относительной вероятности элементов рассматриваемой проблемы. В этой задаче на основе данных о состоянии пациента необходимо было выбрать метод лечения из следующих альтернатив: 1) прервать беременность (*П*); 2) назначить терапевтическое лечение, не прерывая беременность (*НП*).

Проведенные в больнице тесты выявили следующие симптомы:

- Анемия (*Ан*),
- Пониженное количество тромбоцитов (*НТ*),
- Патология печени (*ПП*),
- Сгущение крови (*СК*),
- Увеличение тромбопластинового времени (*ТВ*),
- Повышенное содержание антинуклеарных антител (*ВАА*),
- Повышенное содержание антикардиолипиновых антител (*ВАКА*).

Специалисты предположили, что указанные симптомы могут быть вызваны следующими болезнями (диагнозами):

- Волчанка;
- Тромботическая тромбоцитопеническая пурпура (*ТТП*);
- Гемолиз, увеличение функциональной активности печени и тромбоцитопения (*ГФАПТ*);
- Синдром антикардиолипиновых антител (*САА*).

Боле подробное описание симптомов и диагнозов можно найти в классической книге Колмана с соавторами [21].

На основе суждений лечащего врача, который вел данного пациента, были сформированы три категории матриц парных сравнений. Примеры таких матриц приведены в табл. 6-1–6-3.

Таблица 6-1

Приоритеты симптомов для диагноза *Волчанка*

Волчанка	*Анемия*	*НТ*	*СК*	*ТВ*	*ВАА*	*ВАКА*	**Приоритеты**
Анемия	1	5	4	4	1/9	2	0.156
НТ	1/5	1	1	1	1/9	1	0.050
СК	1/4	1	1	1	1/9	2	0.046
ТВ	1/4	1	1	1	1/9	2	0.046
ВАА	9	9	9	9	1	9	0.630
ВАКА	2	1	2	2	1/9	1	0.072

Таблица 6-2

Приоритеты диагнозов относительно симптомов (в данном случае для *Анемии*)

Анемия	*Волчанка*	*ТТП*	*ГФАПТ*	*САА*	**Приоритеты**
Волчанка	1	1/5	1/9	1/5	0.052
ТТП	5	1	1	1	0.299
ГФАПТ	9	1	1	1	0.350
САА	5	1	1	1	0.299

Таблица 6-3

Приоритеты симптомов относительно симптомов
(в данном случае ВАА)

ВАА	*Анемия*	*НТ*	*СК*	*ВАКА*	**Приоритеты**
Анемия	1	1	4	4	0.455
НТ	1	1	1	1	0.235
СК	1/4	1	1	1	0.155
ВАКА	1/4	1	1	1	0.155

Таблица 6-4

Приоритеты симптомов относительно болезней (диагнозов)

	Волчанка	*ТТП*	**ГФАПТ**	*САА*
Анемия	0.156	0.133	0.313	0.053
НТ	0.050	0.789	0.313	0.158
ПП	0	0	0.313	0
СК	0.046	0.026	0.000	0.263
ТВ	0.046	0.026	0.061	0.263
ВАА	0.630	0	0	0
ВАКА	0.072	0.026	0	0.263

Приоритеты, вычисленные для всех таких матриц, показаны в табл. 6-4–6-6. Выделенные столбцы в таблицах соответствуют приведенным выше матрицам парных сравнений.

При заполнении матриц для табл. 6-4 врач отвечал на вопрос: какой из двух симптомов является более характерным для данной болезни и насколько более характерным?

Суждения выражались вербальными оценками: ***одинаково, умеренно, сильно, очень сильно и чрезвычайно сильно***. Этим оценкам соответствовали конкретные числа: 1, 3, 5, 7, 9. Промежуточные значения 2, 4, 6, 8 использовались как компромисс между соседними вербальными оценками. Для представления «обратных» предпочтений применялись обратные величины, т. е. 1/2, 1/3, ..., 1/9. Такая шкала пригодна для сравнения однородных элементов любой природы. Например, когда мы выясняли, какой из двух симптомов является более характерным для *Волчанки*, *Анемия* или *Низкие тромбоциты* (*НТ*), мы получили ответ, что *Анемия* гораздо более характерна (5) для этой болезни. Отметим, что признак *Патология печени* (*ПП*) не включен в матрицу парных сравнений, так как он не характерен для диагноза *Волчанка*. Поэтому в первом столбце табл. 6-4 ему соответствует нулевое значение приоритета. Следует обратить внимание на то, что

Таблица 6-5

Приоритеты болезней относительно симптомов

	Анемия	*НТ*	*ПП*	*СК*	*ТВ*	*ВАА*	*ВАКА*
Волчанка	0.052	0.231	0	0.279	0.222	0.706	0.119
ТТП	0.299	0.461	0	0.070	0.056	0.088	0.030
ГФАПТ	0.350	0.231	1	0.093	0.056	0.088	0.020
САА	0.299	0.077	0	0.558	0.666	0.118	0.831

нехарактерные признаки не включаются в матрицы сравнений, поскольку их может оказаться бесконечно много. Когда какие-то элементы присутствуют в некоторых, но не во всех матрицах, их можно не рассматривать в процессе сравнений, назначив им нулевые значения в соответствующих позициях вектора приоритетов.

Возвращаясь к матрице суждений, напомним, что экспертные суждения записываются в позиции, расположенные выше главной диагонали. Элементами главной диагонали являются единицы, а элементы нижней треугольной части матрицы представляют собой обратные величины элементов из верхнего треугольника. Важно помнить о том, что, когда суждения выражены отношениями статистических частот, компоненты главного собственного вектора матрицы парных сравнений интерпретируется как частоты, представленные в нормализованной форме.

При заполнении второй матрицы парных сравнений (табл. 6-5) врач отвечал на вопрос: какой из двух диагнозов с большей вероятностью вызывает появление данного симптома и насколько большей вероятностью? Например, какой из двух диагнозов, *Волчанка* или *ТТП*, имеет большую вероятность появления симптома *Анемия*? Мы получили ответ, что для диагноза *ТТП* вероятность проявления *Анемии* существенно выше (5), чем для диагноза *Волчанка*.

Суждения в третьей матрице сравнений (табл. 6-6) формировались по ответам врача на вопрос: для заданного симптома, например *ВАА*, какой из двух симптомов (например, *Анемия* или *НТ*) имеет большую вероятность совместного появления, или какой симптом в большей степени связан с данным симптомом? Отвечая на этот вопрос, врач поставил оценку 1, что означает одинаковую вероятность появления *Анемии* и *Низких тромбоцитов* при заболевании *ВАА*.

Приоритеты, выведенные из парных сравнений, могут быть заменены статистическими данными, полученными на основе наблюдений за тем, какие симптомы являются более характерными для каждой болезни по сравнению с другими признаками. Так как статистические данные не характеризуют отдельных индивидуумов, важным моментом является их использование в конкретных ситуациях с учетом специфических данных

Таблица 6-6

Приоритеты симптомов относительно симптомов

	Анемия	*НТ*	*ПП*	*СК*	*ТВ*	*ВАА*	*ВАКА*
Анемия	1	0	0.25	0	0	0.455	0.095
НТ	0	0	0.75	0.105	0.106	0.235	0.048
ПП	0	0.5	0	0	0	0	0
СК	0	0	0	0	0.429	0.155	0.381
ТВ	0	0	0	0.421	0	0	0.381
ВАА	0	0.5	0	0.053	0.036	0	0.095
ВАКА	0	0	0	0.421	0.429	0.155	0

о пациентах. С помощью суждений можно выразить знания врача о том, каким образом следует применять статистические данные с учетом специфики конкретного пациента.

Данные из табл. 6-4 используются для формирования матрицы-блока W_{21} в суперматрице и отражают вероятности симптомов, связанных с каждым диагнозом. Таблицы 6-5 и 6-6 формируют блоки W_{12} и W_{22} соответственно. Матрица W_{12} содержит вероятности болезней, вызывающих наблюдаемый симптом, а W_{22} соответствует зависимостям между симптомами, т. е. отражает для каждого симптома вероятность одновременного появления других симптомов. Исходные матрицы парных сравнений при желании можно восстановить путем вычисления отношений соответствующих элементов столбцов из табл. 6-4–6-6.

В табл. 6-7 приведена транспонированная матрица, соответствующая блоку W_{31} суперматрицы, в которой записаны приоритеты альтернативных методов лечения для каждой из болезней, вычисленные из матриц парных сравнений, заполненных врачом на основе экспертных знаний. Эти приоритеты показывают, какой из альтернативных методов является более подходящим для лечения данной болезни.

Таблица 6-7

Приоритеты альтернативных методов лечения относительно диагнозов

Диагнозы	*Методы лечения*	
	П	*НП*
Волчанка	0.20	0.80
ТТП	0.80	0.20
ГФАПТ	0.80	0.20
САА	0.83	0.17

Таблица 6-8

Матрица Q для задачи диагностики, представленной на рис. 6-5 ($\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$)

	Волчанка	**ТТП**	*ГФАПТ*	*САА*	*Анемия*	*НТ*	*ПП*	*СК*	*ТВ*	*ВАА*	*ВАКА*
Волчанка	0	0	0	0	0.025	0.115	0	0.14	0.111	0.353	0.059
ТТП	0	0	0	0	0.15	0.231	0	0.035	0.028	0.044	0.015
ГФАПТ	0	0	0	0	0.175	0.115	0.5	0.047	0.028	0.044	0.01
САА	0	0	0	0	0.15	0.038	0	0.279	0.333	0.059	0.416
Анемия	0.156	0.133	0.313	0.053	0.5	0	0.125	0	0	0.227	0.048
НТ	0.05	0.789	0.313	0.158	0	0	0.375	0.053	0.053	0.117	0.024
ПП	0	0	0.313	0	0	0.25	0	0	0	0	0
СК	0.046	0.026	0	0.263	0	0	0	0	0.214	0.078	0.19
ТВ	0.046	0.026	0.061	0.263	0	0	0	0.211	0	0	0.19
ВАА	0.63	0	0	0	0	0.25	0	0.026	0.018	0	0.048
ВАКА	0.072	0.026	0	0.263	0	0	0	0.211	0.214	0.078	0

В табл. 6-8 приведена матрица $Q = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha_1 W_{12} \\ W_{21} & \alpha_2 W_{22} \end{Vmatrix}$ для сетевой структуры, показанной на рис. 6-5, в которой значения $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.5$.

Возводя матрицу Q в предельные степени, получим следующий вектор предельных приоритетов $\boldsymbol{w}$:

$$\boldsymbol{w} = \{0.073;\ 0.068;\ 0.087;\ 0.106;\ 0.169;\ 0.144;\ 0.063;\ 0.067;\ 0.066;\ 0.088;\ 0.07\}^T,$$

представляющий собой совокупность векторов $\boldsymbol{w}_1 = \{0.073;\ 0.068;\ 0.087;\ 0.106\}^T$ и $\boldsymbol{w}_2 = \{0.169;\ 0.144;\ 0.063;\ 0.067;\ 0.066;\ 0.088;\ 0.07\}^T$.

Вычислим значения относительного правдоподобия диагнозов путем нормализации вектора $\boldsymbol{w}_1$:

$$\frac{\boldsymbol{w}_1}{e^T \boldsymbol{w}_1} = \left| \begin{array}{c|c} 0.218 & \textit{Волчанка} \\ 0.203 & \textit{ТТП} \\ 0.262 & \textit{ГФАПТ} \\ 0.317 & \textit{САА} \end{array} \right.$$

Результирующие приоритеты альтернатив получим, умножив приоритеты из табл. 6-7 на приоритеты диагнозов.

Таблица 6-9

Матрица Q для задачи диагностики, представленной на рис. 6-5 ($\alpha_1 = 0.99$; $\alpha_2 = 0.01$)

	Волчанка	ТТП	ГФАПТ	САА	Анемия	НТ	ПП	СК	ТВ	ВАА	ВАКА
Волчанка	0	0	0	0	0.051	0.229	0	0.276	0.22	0.699	0.118
ТТП	0	0	0	0	0.296	0.456	0	0.069	0.055	0.087	0.029
ГФАПТ	0	0	0	0	0.347	0.229	0.99	0.092	0.055	0.087	0.019
САА	0	0	0	0	0.296	0.076	0	0.552	0.66	0.117	0.824
Анемия	0.156	0.133	0.313	0.053	0.01	0	0.003	0	0	0.004	0.001
НТ	0.05	0.789	0.313	0.158	0	0	0.007	0.001	0.001	0.002	0
ПП	0	0	0.313	0	0	0.005	0	0	0	0	0
СК	0.046	0.026	0	0.263	0	0	0	0	0.004	0.002	0.004
ТВ	0.046	0.026	0.061	0.263	0	0	0	0.004	0	0	0.004
ВАА	0.63	0	0	0	0	0.005	0	0.001	0.001	0	0.001
ВАКА	0.072	0.026	0	0.263	0	0	0	0.004	0.004	0.002	0

$$\begin{Vmatrix} 0.2 & 0.8 & 0.8 & 0.833 \\ 0.8 & 0.2 & 0.2 & 0.167 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} 0.218 \\ 0.203 \\ 0.262 \\ 0.317 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.68 \\ 0.32 \end{vmatrix} \begin{matrix} \textit{П} \\ \textit{НП} \end{matrix}$$

Беременность была прервана ($w(\textit{П}) = 0.68$) через две недели после обследования. Врач, принимавший решение, проверил свои суждения с помощью описанной модели, которая подтвердила его мнение. В данном случае мы не имели в распоряжении статистических данных, которые можно было бы использовать для формирования матриц W_{12} и W_{21}. Для принятия решения с применением теоремы Байеса требуется недоступная в данном случае статистическая информация о вероятностях того, что диагностируемый пациент будет иметь те же симптомы, какие имеют люди с рассматриваемым заболеванием.

Мы провели исследование степени взаимного влияния симптомов на полученный результат, изменив исходные значения весовых коэффициентов α_1 и α_2, которые были равны 0.5, на значения $\alpha_1 = 0.99$ и $\alpha_2 = 0.01$ (т. е. вес внутренней зависимости между симптомами был уменьшен с 50 до 1 %). Векторы приоритетов из табл. 6-5 и 6-6 были умножены на новые коэффициенты, и в результате были получены приоритеты, приведенные в табл. 6-9. С новыми данными значение приоритета альтернативы *П* (0.658) несколько снизилось, однако осталось при этом в два раза выше приоритета второй альтернативы.

Таким образом, в данном случае зависимость между симптомами не оказывает существенного влияния на заключительное решение. Однако это не всегда так. Иногда наши знания о болезнях гораздо важнее наблюдаемых симптомов, особенно на ранних стадиях заболевания. Но в сложных ситуациях знания о симптомах и их взаимосвязи могут оказаться весьма важными.

6-7. Выводы

В данной главе показано, что при использовании статистической информации об априорных вероятностях и статистических экспериментальных данных для определения вероятности диагноза при наблюдаемых симптомах в МАИ/МАС предельные приоритеты, выводимые из суперматрицы, совпадают с результатами вычислений по теореме Байеса. Таким образом, если сформирована матрица условных вероятностей W_{21} и матрица апостериорных вероятностей W_{12} в формуле (9), априорные вероятности можно получить как главные правые собственные векторы стохастических матриц W_{12} и W_{21}. Если к этой информации добавляются зависимости между компонентами, например взаимные зависимости между симптомами, предельные результаты в МАИ/МАС будут отличаться от байесовских.

Таким образом, мы показали, что:

1. Существует отличный от байесовского значимый способ объединения статистической информации и экспертных знаний в моделях с неопределенностью. В теореме Байеса результатом являются апостериорные вероятности. В МАИ/МАС мы получаем результат, удовлетворяющий теореме Байеса, но не идентичный ему. В нашем подходе предусмотрена возможность применения различных способов объединения априорных, апостериорных и других вероятностей, в том числе и формула Байеса. Продолжение исследований в этом направлении должно привести к пониманию философского и практического смысла альтернативных способов обобщения информации с высокой степенью неопределенности.

2. В задачах диагностики с зависимыми признаками наряду со статистической информацией необходимы экспертные суждения для представления отношений между симптомами, а также между комбинациями симптомов и диагнозами. При наличии зависимостей теорема Байеса не дает корректных решений в медицинской диагностике.

Подход МАИ/МАС дает логическую основу для связи симптомов с другими знаниями о болезни, используя опыт экспертов наряду с доступными статистическими данными. Кроме того, методология МАИ/МАС позволяет уйти от комбинаторных задач с астрономическим числом сочетаний признаков. Процесс формирования суждений позволяет врачу сосредоточиться на особенностях конкретной ситуации лучше, чем анализ общих причин возникновения болезни. Используя МАИ/МАС, можно получить отношения байесовского типа без ввода условных вероятностей, на которых основана теория Байеса. В МАИ, где парное сравнение элементов выполняется относительно элементов более высокого уровня, суждения заменяют условные вероятности. Если эти вероятности известны, они могут использоваться вместо суждений в матрицах парных сравнений или для поддержки процесса формирования суждений.

Теория МАИ/МАС позволяет использовать как суждения врача, основанные на любых видах субъективной информации, так и статистические данные экспериментов. Эта теория дает результаты, которые представляют собой компромисс между байесовским подходом, требующим экспериментальных данных для диагностики, и более субъективным клиническим подходом, где врачи используют опыт, эксперимент и информацию из разнообразных внешних источников для того, чтобы правильно поставить диагноз.

Значимость и достоверность результатов, получаемых в МАИ/МАС, на сегодняшний день подтверждена многочисленными практическими приложениями. Прогнозы, сделанные на основе теории, свидетельствуют в пользу ее обоснованности. Мы можем привести примеры успешного прогнозирования, выполненные с применением МАИ [22] и МАС [17]. Кроме того, с помощью МАИ/МАС были сделаны прогнозы состояния фондового рынка [23], рейтингов политических кандидатов [24], цен на нефть [25–27], потребления энергии [28], результатов международных соревнований по шахматам [29, 30], численности семей в сельских районах Индии [31], обменного курса валют [32], развития экономики США [19], результатов футбольного турнира сезона 1995–1996 года [20], а также многие другие.

Литература

1. *Saaty T. L. and Vargas L. G.* Diagnosis with Dependent Symptoms: Bayes Theorem and the Analytic Hierarchy Process // Operations Research. 1998, July–August. 46. № 4. P. 491–502.

2. *Bouros D., Panagou P., Tzanakis N. and Siafakas N.* Probability And Characteristics Of Human-Immunodeficiency-Virus Infection In Male Greek Military Personnel With Tuberculosis // Respiration. 1995. 62. 5. P. 280–285.

3. *Brown G. W.* Bayes' Formula: Conditional Probability and Clinical Medicine // Am. J. Dis. Child. 1981. 135. P. 1125–1129.
4. *Charniak E. and McDermott D.* Introduction to Artificial Intelligence. Addison-Wesley, 1985.
5. *Prince M. J.* Predicting The Onset Of Alzheimers-Disease Using Bayes theorem // American Journal Of Epidemiology. 1996. 143. 3. P. 301–308.
6. *Skates S. J., Xu F. J., Yu Y. H., Sjovall K., Einhorn N., Chang Y. C, Bast R. C. and Knapp R. C.* Toward An Optimal Algorithm For Ovarian-Cancer Screening With Longitudinal Tumor-Markers // Cancer. 1995. 76. 10. P. 2004–2010.
7. *Berger J. O.* Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis. Springer-Verlag, 1985.
8. *Howson C. and Urbach P.* , Scientific Reasoning: The Bayesian Approach. Illinois: Open Court; La Salle, 1989.
9. *DeDombal F. T.* Computer-Aided Diagnosis of Acute Abdominal Pain // British Medical Journal. 1972. 2. P. 9–13.
10. *Adams I. D.* Computer-Aided Diagnosis of Acute Abdominal Pain: A Multicentre Study // British Medical Journal. 1986. 293. P. 800–804.
11. *Spiegelhalter D. J. and Knill-Jones R. P.* Statistical and Knowledge-Based Approaches to Clinical Decision-Support Systems with an Application in Gastro-Enterology // Journal of the Royal Statistical Society, Series A. 1984. 147. P. 35–77.
12. *Lauritzen S. L. and Spiegelhalter D. J.* Local Computations with Probabilities on Graphical Structures and Their Application to Expert Systems // Journal of the Royal Statistical Society, Series B. 1988. 50. P. 157–224.
13. *Jonson N. E. G.* Everyday Diagnostics — A Critique of the Bayesian Model // Medical Hypotheses. 1991. 34. P. 289–295.
14. *Gammerman A. and Thatcher A. R.* Bayesian Diagnostic Probabilities without Assuming Independence of Symptoms // Methods of Information in Medicine. 1991. 30. P. 15–22.
15. *Saaty T. L.* Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process // Management Science. 1986. 32/7. P. 841–855.
16. *Saaty T. L.* Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process. RWS Publications, 4922 Ellsworth Ave., Pittsburgh, PA 15213, 1991.
17. *Saaty T. L.* The Analytic Network Process — Decision Making With Dependence And Feedback. RWS Publications, 5001 Baum Blvd., Pittsburgh, PA 15213, 1996.
18. *Gantmacher F. R.* Matrix Theory. New York: John Wiley, 1959.
19. *Blair A., Nachtmann R. and Saaty T. L.* Incorporating Expert Judgment in Economic Forecasts: The Case of the U. S. Economy in 1992 // T. L. Saaty. Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with The Analytic Hierarchy Process. RWS Publications, Pittsburgh, PA, 1993.
20. *Saaty T. L., Turner D. S.* Prediction of the 1996 Superbowl: An Application of the AHP with Feedback (the Supermatrix Approach) / Proceedings of the 4th International Symposium on the Analytic Hierarchy Process, Vancouver, Canada. Expert Choice Inc., 5001 Baum Boulevard, Pittsburgh, PA 15213, 1996.

21. R. W. Colman, J. Hirsh, V. J. Marder, E. W. Salzman (eds.). Homeostasis and Thrombosis. Philadelphia, PA 19106: J. B. Lippincott Company, 1994.

22. *Saaty T. L. and Vargas L. G.* Prediction, Projection and Forecasting. Boston: Kluwer Academic Publishers, 1991.

23. *Saaty T. L., Rogers P. C. and Pell R.* Portfolio Selection Through Hierarchies // Journal of Portfolio Management. 1980. 3. P. 16–21.

24. *Saaty T. L. and Bennett J. P.* A Theory of Analytical Hierarchies Applied to Political Candidacy // Behavioral Science. 1977. 22. P. 237–245.

25. *Gholam-Nezhad H.* 1995: The Turning Point in Oil Prices // The Global Economy: Today, Tomorrow, and the Transition / Ed. by H. F. Didsbury, Jr. Washington, DC: World Future Society, 1985.

26. *Gholam-Nezhad H.* Oil Price Scenarios: 1989 and 1995 // Strategic Planning and Energy Management. 1987. 7. 1. P. 19–31.

27. *Saaty T. L.* and *Gholamnezhad H.* Oil Prices: 1985 and 1990 // Energy Systems and Policy. 1981. 5. 4. P. 303–318.

28. *Saaty T. L. and Mariano R. S.* Rationing Energy to Industries: Priorities and Input-Output Dependence // Energy Systems and Policy. 1979. 8. P. 85–111.

29. *Saaty T. L. and Vargas L. G.* Hierarchical Analysis of Behavior in competition: Prediction in Chess // Behavioral Science. 1980. 25. P. 180–191.

30. *Saaty T. L. and Vargas L. G.* Modeling Behavior in Competition: The Analytic Hierarchy Process // Applied Mathematics and Computation. 1985. 16. P. 49–92.

31. *Saaty T. L. and Wong M.* The Average Family Size in Rural India // Journal of Mathematical Sociology. 1983. 9. P. 181–209.

32. *Blair A., Nachtmann R., Olson J. and Saaty T.* Forecasting Foreign Exchange Rates: An Expert Judgment Approach // Socio-Economic Planning Sciences. 1987. 21. 6. P. 363–369.

Глава 7

Распределение неосязаемых ресурсов: МАИ и линейное программирование

7-1. Введение

Неосязаемыми мы называем признаки или свойства, для которых отсутствуют шкалы измерений. Неосязаемые признаки, например такие как влияние или качество, встречаются в задачах распределения ресурсов, но обычно не включаются в количественные математические модели из-за отсутствия способа их измерения. Между тем, существует нетривиальный способ количественной оценки неосязаемых признаков с помощью относительного измерения и вычисления приоритетов. При этом возникает возможность объединения этих приоритетов с нормированными оценками измеряемых (осязаемых) признаков в задачах распределения ресурсов. В этом случае модель линейного программирования преобразуется в эквивалентную модель, содержащую коэффициенты и переменные, измеренные в относительных шкалах, в том числе приоритеты осязаемых признаков (ресурсов). Оптимальное решение такой задачи будет показывать относительное количество каждого ресурса. Наличие осязаемых ресурсов делает возможной оценку стоимости или ценности неосязаемых ресурсов через соотношения приоритетов в каждой конкретной задаче. Ниже приводится детальное описание примера, иллюстрирующего эту идею. Данная глава составлена по материалам работы, выполненной мной совместно с моими коллегами Клаусом Деллманом и ЛуисомВаргасом [1].

Неосязаемые ресурсы, такие как профессионализм, заинтересованность и интеллект, почти всегда необходимы при разработке планов, проектировании систем или решении сложных проблем. До сих пор в моделях распределения ресурсов неосязаемые признаки не рассматривались непосредственно, а учитывались косвенно через показатели стоимости, обычно измеряемые количеством времени или денег. Наша цель заключается в том, чтобы продемонстрировать возможность относительного измерения неосязаемых ресурсов путем их сравнения с осязаемыми. Результатом такого измерения являются приоритеты, полученные в шкалах отношений, которые используются в качестве коэффициентов в задаче оптимального распределения ресурсов. Результаты оптимизации также имеют относительный характер, поскольку для неосязаемых ресурсов отсутствуют единицы измерения и абсолютные количества ресурсов не могут быть определены, но при наличии измеряемых ресурсов существует возможность вычисления их абсолютных эквивалентов на основе пропорциональности приоритетов.

Проблема измерения неосязаемых признаков возникает во многих практических задачах, например при оценке ценности активов, принадлежащих корпорациям. Даже если кто-то сумеет доказать, что рыночную стоимость компании, включая ее неосязаемые ресурсы, можно точно рассчитать лишь по материальным активам, то измерение неосязаемых признаков не утрачивает своей актуальности. Например, при слиянии компаний происходит качественное и количественное изменение неосязаемых признаков благодаря синергии, причем эти изменения могут оказывать положительное или отрицательное воздействие на ценность объединенной компании. Поэтому учет неосязаемых признаков может существенно влиять на принятие решения о слиянии компаний. Ниже мы рассмотрим пример подобной задачи.

7-2. Об измерении неосязаемого

В словаре Вебстера *осязаемое* трактуется как нечто, что можно «понять или осмыслить как определяемое или измеряемое», а *неосязаемое* — как то, что «невозможно измерить или точно определить». Таким образом, измерение является главным моментом в преобразовании неосязаемого в осязаемое. Шкала измерений требует задания единиц измерения. Единица измерения — это единственный и важнейший строительный блок, из которого формируется шкала. Измерение в шкале заключаются в назначении чисел, кратных единице шкалы или являющихся ее долями. Шкала — это набор объектов, пространство чисел и отображение объектов в числа, инвариантное некоторым преобразованиям. Для того чтобы построить

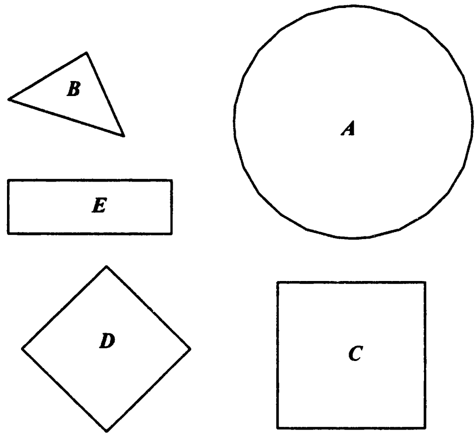


Рис. 7-1. Сравнение геометрических фигур

последовательное отображение, в котором объекту, обладающему большим количеством измеряемого свойства, будет назначено большее значение, нужно сравнить данное измерение со всеми другими измерениями в этой шкале, которые известны. Таким образом, сравнение и опыт являются неотъемлемой частью измерений.

Чтобы измерить неосязаемые признаки, необходимо осуществить сравнения, которые может выполнить эксперт, способный на количественном уровне различить неосязаемые свойства объектов. Так как шкала измерений отсутствует, то сравнения следует проводить в относительных терминах. Чтобы увидеть, как это делается и что результаты такого подхода к измерению являются значимыми и заслуживают доверия, мы сначала проиллюстрируем сравнение осязаемых признаков, а именно площадей некоторых геометрических фигур, показанных на рис. 7-1.

Таблица 7-1

Относительные измерения площади геометрических фигур

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	Приоритеты	Реальная площадь в относительных единицах
A	1	9	2.5	3.5	5	0.490	0.471
B	1/9	1	1/5	1/2.5	1/2	0.050	0.050
C	1/2.5	5	1	2	2.5	0.235	0.234
D	1/3.5	2.5	1/2	1	1.5	0.131	0.149
E	1/5	2	1/2.5	1/1.5	1	0.094	0.096

Таблица 7-2

Относительное количество белка в продуктах

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*	Приоритеты	Фактическое относительное содержание белков
A — Мясо	1	9	9	6	4	5	1	0.345	0.370
B — Картофель		1	1	1/2	1/4	1/3	1/4	0.031	0.040
C — Яблоки			1	1/3	1/3	1/5	1/9	0.030	0.0
D — Соя				1	1/2	1	1/6	0.065	0.070
E — Пшеничный хлеб					1	3	1/3	0.124	0.110
F — Торт						1	1/5	0.078	0.090
G — Рыба							1	0.328	0.320
								Согласованность: 0.028	

При сравнении каждой пары фигур по площади сначала нужно определить, какая из них меньше, а затем оценить, во сколько раз площадь другой фигуры больше первой. Результаты сравнений записываются в матрицу $A = \{a_{ij}\}$. Если площадь фигуры i в a_{ij} раз больше площади фигуры j, то площадь фигуры j в $a_{ji} = 1/a_{ij}$ раз больше площади i-й фигуры (свойство обратной симметрии). Матрица парных сравнений, выведенная на ее основе шкала приоритетов и относительные значения, полученные на основе фактических измерений, приведены в табл. 7-1.

При анализе объектов с измеряемыми свойствами, которые невозможно оценить с помощью чувств, сравнения имеют более абстрактный характер [2]. Рассмотрим табл. 7-2, где показана матрица парных сравнений для оценки относительного количества белка в различных продуктах.

Оба примера демонстрируют способность опытного человека к формированию информативных численных суждений, на основе которых получаются относительные оценки, весьма близкие к истинным. Прежде чем перейти к неосязаемым свойствам, рассмотрим кратко теоретические основы распределения ресурсов с применением МАИ и метода линейного программирования (ЛП).

Применение МАИ в данном случае позволяет вывести шкалы для измерения неосязаемых ресурсов на основе парных сравнений. Для оптимального распределения ресурсов применяется модель ЛП, в которой в качестве коэффициентов используются относительные величины, выведенные из парных сравнений.

7-3. Об оценке коэффициентов линейного программирования

Модель линейного программирования можно преобразовать к виду, в котором она будет содержать относительные измерения. Следовательно, когда существуют шкалы измерений, относительная модель линейного программирования (ОЛП) с измерениями в относительных шкалах и абсолютная модель линейного программировании (ЛП) с физическими измерениями, которые, как показал Робертс [3], должны принадлежать к шкалам отношений, совпадают с точностью до постоянного множителя. При этом становится возможным построение моделей ЛП для оптимального распределения неосязаемых ресурсов, основанных исключительно на относительных измерениях. Преобразования традиционной модели ЛП в относительную модель показаны в табл. 7-3.

Важно отметить, что значения коэффициентов в относительной модели могут принимать произвольные значения, но при этом должны сохраняться их соотношения, так как они представляют величины, полученные из парных сравнений.

Рассмотрим три разных случая, связанных с наличием в модели неосязаемых признаков.

1. Неосязаемые объекты могут присутствовать в целевой функции, где коэффициенты представлены приоритетами, а все остальные параметры имеют традиционный смысл. Эта проблема не вызывает практических трудностей, так как решение не изменится при делении коэффициентов целевой функции на константу, что позволяет перейти к относительным величинам [4].
2. Если в задаче заданы ограничения на измеряемые переменные, они преобразуются в модель ОЛП. К этим ограничениям можно добавить новые ограничения на неосязаемые переменные путем вывода относительных коэффициентов a_{ij}^R $j = 1, \ldots, n$ из парных сравнений в соответствии с относительным потреблением ресурсов, представленных переменными модели. Затем в процессе парных сравнений определяется доступность каждого ресурса или потребность в нем. Если ограничения на измеряемые ресурсы отсутствуют, мы выполняем парные сравнения доступности неосязаемых ресурсов (или потребности в них), чтобы определить значения правых частей неравенств b_i^R для каждого ограничения.
3. Включение в модель переменных, которые соответствуют неосязаемым ресурсам или видам деятельности, требует выполнения следующих шагов: 1) вычисление приоритетов вклада переменных в цель;

Таблица 7-3

Преобразование модели ЛП к модели ОЛП

		Традиционное ЛП	*Преобразования*	*Относительное ЛП*
Переменные		$\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$		$\vec{w} = (w_1, \ldots, w_n)^T$
Целевая функция		$\sum_j c_j x_j$	$c_j^R = \dfrac{c_j}{\sum_k \lvert c_k \rvert}$	$\sum_j c_j^R w_j$
Ограничения		$\sum_j a_{ij} x_j \le b_i$	$\left\{ \begin{array}{l} a_{ij}^R = \dfrac{a_{ij}}{\sum_k \lvert a_{ik} \rvert} \\ b_i^R = \dfrac{\frac{b_i}{\sum_k \lvert a_{ik} \rvert}}{\sum_h \frac{\lvert b_h \rvert}{\sum_k \lvert a_{hk} \rvert}} \\ w_j = \dfrac{x_j}{\sum_h \frac{\lvert b_h \rvert}{\sum_k \lvert a_{hk} \rvert}} \end{array} \right\}$	$\sum_j a_{ij}^R w_j \le b_i^R$
Постановка задачи	***Основная***	$\max \sum_j c_j x_j$ $\sum_j a_{ij} x_j \le b_i;\ x_j \ge 0$		$\max \sum_j c_j^R w_j$ $\sum_j a_{ij}^R w_j \le b_i^R;\ w_j \ge 0$
	Двойственная	$\min \sum_i b_i y_i$ $\sum_i a_{ij} y_i \ge c_j;\ y_i \ge 0$		$\min \sum_i b_i^R v_i$ $\sum_i a_{ij}^R v_i \ge c_j^R;\ v_i \ge 0$

2) определение приоритетов видов деятельности, которые используются в качестве весовых коэффициентов в ограничениях на ресурсы. С неосязаемыми переменными работать несколько труднее, потому что интерпретация относительного решения задачи ЛП требует наличия единиц измерения. Если в задачу включены измеряемые переменные, то единицы их измерения можно применить к неосязаемым признакам. При полном отсутствии единиц измерения мы не сможем получить абсолютных значений для компонентов вектора решения, поскольку будем располагать только относительными значениями в форме приоритетов.

7-4. Пример

Две промышленные компании *A* и *B* стремятся к слиянию, так как их руководство полагает, что объединение даст положительный синергетический эффект, который позволит увеличить конкурентные преимущества за счет следующих факторов:

- Расширение доли рынка, связанное с положительным воздействием престижной торговой марки и высокого качества (*Рынки*).
- Активизация инновационной деятельности (*Инновации*).
- Снижение издержек вследствие интеграции человеческих ресурсов в технической и организационной сферах (*Снижение издержек, СИ*).

Для достижения поставленных целей используются такие ресурсы, как *Имидж марки* (*ИМ*), *Качество продукции* (*КП*), *Человеческие ресурсы в сфере производства* (*ЧРП*) и *Человеческие ресурсы в сфере управления* (*ЧРУ*). При слиянии компаний ресурсы каждой из них будут вносить различный вклад в перечисленные выше факторы (*Рынки*, *Инновации* и *СИ*).

Распределение бюджетных средств компаний в сфере человеческих ресурсов (*ЧРП* и *ЧРУ*) приведено в табл. 7-4. Там же показано относительное распределение этих ресурсов по сферам деятельности (*Рынки, Инновации, СИ*). Например, компания *A* вкладывает в *Рынки* 10 % бюджета, ассигнованного на *ЧРП*, в *Инновации* — 70 % и в *Снижение издержек* — 20 %. В свою очередь, компания *B* тратит на эти же цели соответственно 10, 80 и 10 %.

Пусть w_{ij} — величина трудозатрат i-й компании, ориентированных на достижение фактора j; а s_{ij} — относительный вклад j-го фактора в общую стоимость компании i. Необходимо определить оптимальные значения w_{ij}, т. е. установить, какой вклад следует сделать каждой компании в каждый вид деятельности (фактор) для того, чтобы общая стоимость объединенной компании была максимальной, т. е. $Z = \max \sum_{i,j} s_{ij} w_{ij}$.

Таблица 7-4

Бюджеты компаний и распределение ресурсов на единицу трудовых затрат

	Рынки	*Инновации*	*Снижение издержек (СИ)*	*ЧРП (млн дол.)*
Компания A	0.1	0.7	0.2	182
Компания B	0.1	0.8	0.1	455
				ЧРУ (млн дол.)
Компания A	0.3	0.1	0.6	435
Компания B	0.4	0	0.6	155

Таблица 7-5

Относительный вклад факторов в общую стоимость компании

Компания A	*Рынки*	*Инновации*	*Снижение издержек (СИ)*	**Приоритеты**
Рынки	1	2	2	0.49
Инновации	1/2	1	1/2	0.20
СИ	1/2	2	1	0.31

Компания B	*Рынки*	*Инновации*	*Снижение издержек (СИ)*	**Приоритеты**
Рынки	1	1	2	0.4
Инновации	1	1	2	0.4
СИ	1/2	1/2	1	0.2

Чтобы оценить коэффициенты s_{ij}, мы будем задавать экспертам следующий вопрос: какой из двух факторов вносит больший вклад в общую стоимость компании? Результаты парных сравнений и соответствующие приоритеты приведены в табл. 7-5.

Теперь сформулируем задачи линейного программирования для определения оптимального распределения человеческих ресурсов компаний, выраженных в денежных единицах:

Компания A:

$\mathbf{max}\{0.49w_{11} + 0.2w_{12} + 0.31w_{13}\}$

при ограничениях:

$0.1w_{11} + 0.7w_{12} + 0.2w_{13} \leq 182;$

$0.3w_{11} + 0.1w_{12} + 0.6w_{13} \leq 435;$

$w_{ij} \geq 0.0.$

Компания B:

$\mathbf{max}\{0.4w_{21} + 0.4w_{22} + 0.2w_{23}\}$

при ограничениях:

$0.1w_{21} + 0.8w_{22} + 0.1w_{23} \leq 455;$

$0.4w_{21} + 0.6w_{23} \leq 155;$

$w_{ij} \geq 0.0.$

Коэффициенты в ограничениях взяты из табл. 7-4. Эти задачи имеют следующие решения:

Компания A:

$w_{11} = 1431.5;$

$w_{12} = 55.5;$

$w_{13} = 0.0;$

$Z_1 = 711.98.$

Компания B:

$w_{21} = 387.5;$

$w_{22} = 550.3;$

$w_{23} = 0.0;$

$Z_2 = 363.1.$

Если произойдет слияние компаний, то распределение трудовых ресурсов будет описываться следующей моделью:

$\mathbf{max}\{0.49w_{11} + 0.2w_{12} + 0.31w_{13} + 0.4w_{21} + 0.4w_{22} + 0.2w_{23}\}$
при ограничениях:
$0.1w_{11} + 0.7w_{12} + 0.2w_{13} + 0.1w_{21} + 0.8w_{22} + 0.1w_{23} \leq 637;$
$0.3w_{11} + 0.1w_{12} + 0.6w_{13} + 0.4w_{21} + 0.6w_{23} \leq 590;$
$w_{ij} \geq 0.0.$

Эта модель дает следующее решение:

$w_{11} = 1066.67;$
$w_{12} = w_{13} = w_{21} = w_{23} = 0.0;$
$w_{22} = 550.42;$
$Z_3 = 1183.83.$

Отметим, что слияние компаний приводит к увеличению значения целевой функции по сравнению с суммой индивидуальных целевых функций обеих компаний:

$Z_1 + Z_2 = 711.98 + 363.1 = 1075.08;$
$Z_3 = 1183.83.$

Теперь допустим, что мы хотим получить оптимальное распределение всех видов ресурсов, в том числе и неосязаемых: *Имидж марки* (*ИМ*) и *Качество продукции* (*КП*). В данном случае сначала необходимо упорядочить в соответствии с приоритетами относительные количества используемых ресурсов. Пусть a^R_{ijk} — относительное количество k-го ресурса, используемого i-й компанией в j-й сфере. Чтобы оценить эти величины, мы должны задавать следующий вопрос при проведении парных сравнений: для достижения какого из двух факторов данная компания использует заданный ресурс в большей мере и насколько большей? Результаты парных сравнений для ресурса *Имидж марки* приведены в табл. 7-6.

Таблица 7-6

Парные сравнения и приоритеты факторов, полученные для распределения ресурса Имидж марки

Компания А	*Рынки*	*Инновации*	*Снижение издержек (СИ)*	*Приоритеты*
Рынки	1	8	2	0.666
Инновации	1/8	1	2	0.167
СИ	1/2	1/2	1	0.167

Компания В	*Рынки*	*Инновации*	*Снижение издержек (СИ)*	*Приоритеты*
Рынки	1	1	9	0.6
Инновации	1	1	1/3	0.2
СИ	1/9	3	1	0.2

Таблица 7-7

Матрица относительных коэффициентов ограничений для задачи распределения ресурсов в соответствии с целями

	Компания A			*Компания B*		
	Рынки	*Инновации*	*СИ*	*Рынки*	*Инновации*	*СИ*
Имидж марки	0.667	0.167	0.166	0.6	0.2	0.2
Качество продукции	0.7	0.2	0.1	0.6	0.3	0.1
*ЧРП**	0.1	0.7	0.2	0.1	0.8	0.1
ЧРУ	0.3	0.1	0.6	0.4	0.0	0.6

Относительные количества для всех видов используемых ресурсов приведены в табл. 7-7.

В заключение мы упорядочиваем по приоритетам относительную важность ресурсов. Пусть b_{ik}^{R} — относительное количество k-го ресурса, доступного для компании i. Мы задавали следующий вопрос в процессе парных сравнений: для данной компании, какой из двух видов ресурсов (например, *ИМ* или *КП*) является более важным и насколько более важным? Результаты сравнений приведены в табл. 7-8.

Таблица 7-8

Парные сравнения видов ресурсов по важности

Компания A	*ИМ*	*КП*	*ЧРП*	*ЧРУ*	**Приоритеты**	***Объединенная компания AB***	**Приоритеты**
ИМ	**1**	3	2	1/2	0.286	*ИМ*	0.2135
КП	1/3	**1**	1/2	1/4	0.097	*КП*	0.18
ЧРП	1/2	2	**1**	1/2	0.182	*ЧРП*	0.3185
ЧРУ	2	4	2	**1**	0.435	*ЧРУ*	0.288
Компания B	*ИМ*	*КП*	*ЧРП*	*ЧРУ*	**Приоритеты**		
ИМ	**1**	1/2	1/3	1	0.141		
КП	2	**1**	1/2	2	0.263		
ЧРП	3	2	**1**	3	0.455		
ЧРУ	1	1/2	1/3	**1**	0.141		

Модели линейного программирования для задач распределения всех видов ресурсов имеют следующий вид:

Для *Компании A*:

$\mathbf{max}\{0.49w_{11} + 0.2w_{12} + 0.31w_{13}\}$ при ограничениях:

$0.8w_{11} + 0.1w_{12} + 0.1w_{13} \le 0.286;$

$0.7w_{11} + 0.2w_{12} + 0.1w_{13} \le 0.097;$

$0.1w_{11} + 0.7w_{12} + 0.2w_{13} \le 0.182;$

$0.3w_{11} + 0.1w_{12} + 0.6w_{13} \le 0.435;$

$w_{ij} \ge 0.0.$

Для *Компании B*:

$\mathbf{max}\{0.4w_{21} + 0.2w_{22} + 0.2w_{23}\}$ при ограничениях:

$0.6w_{21} + 0.2w_{22} + 0.2w_{23} \le 0.141;$

$0.6w_{21} + 0.3w_{22} + 0.1w_{23} \le 0.263;$

$0.1w_{21} + 0.8w_{22} + 0.1w_{23} \le 0.455;$

$0.4w_{21} + 0.6w_{23} \le 0.141;$

$w_{ij} \ge 0.0.$

Для *Объединенной компании AB*:

$\mathbf{max}\{0.49w_{11} + 0.2w_{12} + 0.31w_{13} + 0.4w_{21} + 0.4w_{22} + 0.2w_{23}\}$

при ограничениях:

$0.3335w_{11} + 0.0835w_{12} + 0.083w_{13} + 0.3w_{21} + 0.1w_{22} + 0.1w_{23} \le 0.2135;$

$0.35w_{11} + 0.1w_{12} + 0.05w_{13} + 0.3w_{21} + 0.15w_{22} + 0.05w_{23} \le 0.18;$

$0.05w_{11} + 0.35w_{12} + 0.1w_{13} + 0.05w_{21} + 0.4w_{22} + 0.05w_{23} \le 0.3185;$

$0.15w_{11} + 0.05w_{12} + 0.3w_{13} + 0.2w_{21} + 0.3w_{23} \le 0.288;$

$w_{ij} \ge 0.0.$

Решения, полученные для этих задач ЛП, приведены в табл. 7-9. Следует обратить внимание на то, что целевая функция объединенной компании (0.579) превышает сумму целевых функций отдельных компаний $(0.247 + 0.251 = 0.498)$ на 16 %. Это происходит благодаря разделению трудовых затрат и других ресурсов между компаниями: компания *A* вкладывает больше средств в факторы *Рынки* и *Снижение издержек*, а компания *B* — в *Инновации*. В относительных величинах компания *A* вкладывает $\frac{0.149}{0.149+0.885} = 14.4\%$ своих усилий в *Рынки* и $\frac{0.885}{0.149+0.885} = 85.6\%$ в *Снижение издержек*. Компания *B* ориентирует свою деятельность на *Инновации*, а объединенная компания *AB* распределяет ресурсы следующим образом: 9.4 % — в *Рынки*; 34.96 % — в *Инновации* и 55.64 % — в *Снижение издержек*.

Относительные значения полученных приоритетов можно перевести в денежное измерение, если имеются какие-нибудь ресурсы, измеряемые в денежном масштабе. Не следует полагать, что подобный перевод можно сделать всегда. Сначала мы преобразуем приоритеты неосязаемых ресурсов

Таблица 7-9

Решения, полученные для моделей ЛП

Компания А	Коэффициенты в ограничениях			Правая часть
	Рынки	*Инновации*	*СИ*	
Имидж марки	0.667	0.167	0.166	0.286
Качество продукции	0.7	0.2	0.1	0.097
ЧРП	0.1	0.7	0.2	0.182
ЧРУ	0.3	0.1	0.6	0.435
	Коэффициенты целевой функции			Значение ЦФ
	0.49	0.2	0.31	**0.247**
Решение	$w_{11} = 0.022$	$w_{12} = 0.056$	$w_{11} = 0.705$	

	Коэффициенты в ограничениях			
Компания В	*Рынки*	*Инновации*	*СИ*	Правая часть
Имидж марки	**0.6**	0.2	0.2	0.141
Качество продукции	0.6	0.3	0.1	0.263
ЧРП	0.1	0.8	0.1	0.455
ЧРУ	0.4	0	0.6	0.141
	Коэффициенты целевой функции			Значение ЦФ
	0.4	0.4	0.2	**0.251**
Решение	$w_{21} = 0.0$	$w_{22} = 0.550$	$w_{21} = 0.155$	

Объединенная компания АВ	Коэффициенты в ограничениях						Правая часть
Имидж марки	0.334	0.083	0.083	0.3	0.1	0.1	0.2135
Качество продукции	0.35	0.1	0.05	0.3	0.15	0.05	0.18
ЧРП	0.05	0.35	0.1	0.05	0.4	0.05	0.3185
ЧРУ	0.15	0.05	0.3	0.2	0	0.3	0.288
	Коэффициенты целевой функции						Значение ЦФ
	0.49	0.2	0.31	0.4	0.4	0.2	**0.579**
Решение	$w_{11} = 0.149$	$w_{12} = 0.0$	$w_{13} = 0.885$	$w_{21} = 0.0$	$w_{22} = 0.556$	$w_{23} = 0.0$	

в денежные единицы, используя в качестве единицы измерения приоритет одного из материальных ресурсов. Например, приоритет измеряемого в деньгах ресурса *ЧРП* (0.3185) соответствует значению $\frac{b_3}{\sum_j a_{3j}} = \frac{637}{1} = 637$.

Следовательно, денежный эквивалент приоритета неосязаемого ресурса *Имидж марки* можно вычислить следующим образом: $\frac{0.2135}{0.3185} \times 637 = 427$, а для ресурса *Качество продукции* — $\frac{0.18}{0.3185} \times 637 = 360$. Если бы мы взяли другой материальный ресурс *ЧРУ*, то получили бы другие денежные эквиваленты: 437 и 369 соответственно для *ИМ* и *КП*. Такие несовпадения случаются, когда для вычисления абсолютных значений неосязаемых ресурсов используется более одного материального ресурса. Чтобы сохранить пропорциональность между измеряемыми ресурсами, можно для вычисления значений неосязаемых ресурсов использовать только один материальный ресурс, а затем скорректировать приоритеты остальных материальных ресурсов. Другой способ заключается в нахождении средних значений, которые в данном случае равны 432 и 364 соответственно. Наконец, решение можно перевести в денежное измерение, применяя преобразование $x_{ij} = w_{ij} \sum_i \frac{b_i}{\sum_{j,k} a_{ijk}}$, в результате которого получим следующие значения переменных модели ЛП:

$$x_{11} = 0.149(432 + 364 + 637 + 590) \approx 302;$$
$$x_{13} = 0.885(432 + 364 + 637 + 590) \approx 1791;$$
$$x_{22} = 0.556(432 + 364 + 637 + 590) \approx 1125;$$
$$x_{12} = x_{21} = x_{23} = 0.$$

Таким образом, мы получили интерпретацию решения в денежном измерении, которая позволяет обоснованно подойти к распределению бюджетных средств компании, направляемых в различные сферы для достижения поставленной цели.

7-5. Заключение

Получая приоритеты в шкалах отношений, в задачах оптимального распределения ресурсов можно одновременно рассматривать материальные и неосязаемые ресурсы. Когда мы имеем дело только с неосязаемыми ресурсами, полученное решение задачи ОЛП следует привести к нормированному (на единицу) виду с целью его интерпретации. Если в задаче присутствует хотя бы один измеряемый ресурс, то можно преобразовать полученные относительные величины в единицы измерения этого ресурса, применяя соответствующие методики.

Литература

1. *Saaty T. L., Vargas L. G.* The allocation of intangible resources: The Analytic Hierarchy Process and Linear Programming // Proceedings of the Fifth International Symposium on the Analytic Hierarchy Process, Kobe, Japan, August 12–14, 1999. P. 192–197.
2. *Saaty T. L.* A Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures // Journal of Mathematical Psychology. 1977. 15. 3. P. 234–281.
3. *Roberts F. S.* Limitations on Conclusions Using Scales of Measurement // RUTCOR Research Report № 48–91. Rutgers University, New Brunswick, NJ 08903–5062, 1991.
4. *Saaty T. L. and Peniwati K.* The Analytic Hierarchy Process and Linear Programming in Human Resource Allocation // Proceedings of the Fourth International Symposium on the Analytic Hierarchy Process. Simon Fraser University, Burnaby, B. C., Canada, July 12–15, 1996. P. 492–504.

Глава 8

Метод анализа иерархий: резюме

8-1. Введение

Метод анализа иерархий (МАИ) и метод аналитических сетей (МАС), являющийся обобщением МАИ, позволяют применять объективные математические методы для обработки неизбежно субъективных предпочтений индивидуумов или групп в задачах принятия решений. Методология МАИ/МАС заключается в построении иерархии или сети с обратными связями с последующим формированием суждений на основе парных сравнений элементов по общим для них критериям или свойствам, в результате чего получаются шкалы отношений, из которых затем синтезируется обобщенная по всей структуре шкала для выбора лучшей альтернативы.

Традиционно МАИ/МАС используются для задач ранжирования или выбора лучших альтернатив путем вычисления приоритетов альтернатив и критериев. Обычно выбор критериев является прерогативой лица, принимающего решение (ЛПР), при этом критерии могут измеряться в различных шкалах, примерами которых являются шкалы для измерения веса и расстояния. Кроме того, в задачах принятия решений могут встречаться неосязаемые критерии, для которых отсутствуют шкалы измерений. Измерения в различных шкалах нельзя просто объединить или сложить. Поэтому в МАИ сначала вычисляются приоритеты критериев в терминах важности, которая характеризует их вклад в главную цель, затем приоритеты альтернатив, показывающие степень соответствия альтернатив требованиям критериев. Эти приоритеты получаются из матриц парных сравнений, заполненных суждениями или отношениями реальных измерений, если таковые имеются. Процесс упорядочивания объектов в соответствии с приоритетами (*приоритизация*) позволяет решить проблему, связанную с применением различных типов шкал, путем определения значимости объектов в системе ценностей ЛПР. Завершающей стадией МАИ является синтез обобщенных (глобальных) приоритетов альтернатив, характеризующих их вклад в главную цель, расположенную на вершине иерархии. Синтез включает операции умножения и сложения, которые можно применять не только к приоритетам, но и к реальным измерениям свойств альтернатив, если они принадлежат одной шкале. Таким образом, МАИ предоставляет возможность свести проблему многомерного шкалирования к одномерной задаче.

Основные принципы МАИ:

1. *Шкалы отношений, пропорциональность, и нормирование* являются главными понятиями в процедурах вычисления и синтеза приоритетов не только в МАИ, но в любом многокритериальном методе, который должен обеспечить интегрирование существующих шкал измерений со шкалами, сформированными для оценки персональных ценностей. Кроме того, шкалы отношений являются единственным инструментом, который позволяет обобщить теорию принятия решений на случай зависимостей и обратных связей между критериями и альтернативами, так как измерения в шкалах отношений можно перемножать и складывать, если они принадлежат одной шкале, например шкале приоритетов. Если два эксперта (ЛПР) приходят к разным шкалам отношений в одной задаче, необходимо проверить согласованность их суждений и сделать вывод о том, являются ли их суждения близкими. Для оценки согласованности в МАИ используется специальный индекс (*C.I.*), природа которого не является чисто статистической. Шкалы отношений позволяют обеспечить соизмеримость оценок по разным критериям в задачах принятия решений, представленных совокупностью иерархий, например иерархиями выгод, издержек, возможностей и рисков, подчиненных критерию более высокого уровня (например, *Экономическая эффективность*). Шкалы отношений становятся необходимыми в процессах пропорционального распределения ресурсов, в том числе в линейном программировании, которое обобщатся на случай относительных измерений и дает решение в относительных терминах.

2. *Обратно симметричные матрицы парных сравнений* позволяют выразить семантические суждения числами из фундаментальной шкалы (выведенной из модели «стимул — реакция»). Главный собственный вектор матрицы парных сравнений, который характеризует степень доминирования каждого элемента над другими элементами в матрице, называется вектором приоритетов. Элемент, не обладающий за-

данным свойством, автоматически получает нулевое значения в собственном векторе без включения его в матрицу парных сравнений. Доминирование по всем возможным направлениям на графе рассматриваемого решения получается путем возведения суперматрицы, описывающей этот граф, в целочисленные степени с предварительной нормализацией ее столбцов. В МАИ/МАС допускаются отклонения от абсолютной согласованности в суждениях, и вычисляется оценка этого отклонения, которая может помочь ЛПР в улучшении согласованности суждений и в достижении лучшего понимания проблемы. В МАИ разработаны процедуры, позволяющие работать с неполным набором парных сравнений в матрице размерности n, т. е. число задаваемых суждений может быть меньше, чем $n(n - 1)/2$. Вместо использования интервальных суждений, которые приводят к трудоемким оптимизационным и статистическим процедурам, в МАИ часто выполняются следующие действия: а) сравнение диапазонов значений критериев, б) анализ чувствительности полученных результатов к возмущениям в исходных суждениях. Суждения могут рассматриваться как случайные величины, описываемые распределениями вероятности. В МАИ предусмотрены три способа ранжирования альтернатив:

- *Относительное*, которое упорядочивает несколько альтернатив на основе парных сравнений, что особенно актуально для новых и исследовательских решений.
- *Абсолютное*, с помощью которого можно оценивать неограниченное количество альтернатив по отдельности, применяя шкалы интенсивности предпочтений, построенные для каждого критерия. Этот тип оценивания и ранжирования особенно полезен в решениях, где существует достаточная информация для оценки относительной важности значений *интенсивности*. Данный способ удобен для фильтрации большого множества альтернатив, лучшие из которых затем можно ранжировать относительным способом.
- Эталонное тестирование (*benchmark*), которое упорядочивает альтернативы путем включения в их набор эталонного объекта с известными свойствами и последующим сравнением с ним других альтернатив.

3. *Чувствительность главного правого собственного вектора* к возмущениям в суждениях ограничивает размерность матриц парных сравнений (≤ 10) и требует, чтобы сравниваемые объекты были однородными. Главный левый собственный вектор матрицы парных сравнений можно интерпретировать как вектор обратных величин приоритетов. Это обусловлено тем, что в каждом сравнении один из двух объектов принимается за единицу, а степень доминирования второго объекта определяется как число, кратное этой единице. Такая методика срав-

нений не позволяет получить левый собственный вектор непосредственно из парных сравнений, поскольку доминирующий элемент нельзя расчленить априори; в результате, для того чтобы оценить, насколько один элемент меньше другого, мы должны взять величину, обратную той, что мы получим, спрашивая, во сколько раз *больший* элемент превосходит *меньший*.

4. *Однородность и кластеризация* используются для постепенного расширения границ фундаментальной шкалы от одного кластера к другому смежному кластеру, что, в конечном счете, позволяет перейти от отрезка $[1, 9]$ к отрезку $[1, \infty]$.

5. *Синтез приоритетов на иерархиях и на сетевых структурах с зависимостью и обратной связью* применяется для вывода глобальной шкалы отношений, необходимой для представления обобщенного результата. Синтез локальных приоритетов (шкал отношений) обеспечивает корректные результаты только в том случае, если он выполняется для известных шкал путем вычисления взвешенной суммы (аддитивного взвешивания). Следует помнить, что аддитивное взвешивание на иерархической структуре приводит к полилинейной форме, следовательно, результат является нелинейным. Известно, что в общем случае такие полилинейные формы компактны в пространствах обобщенных функций (дискретных и непрерывных). Следовательно, их линейные комбинации могут использоваться в качестве сколь угодно близкого приближения к любому нелинейному элементу данного пространства. Мультипликативное взвешивание, при котором приоритеты альтернатив возводятся в степени, соответствующие приоритетам критериев (определяемых путем аддитивного взвешивания!) с последующим перемножением результатов, имеет четыре главных недостатка: а) оно не позволяет восстановить исходные значения приоритетов альтернатив по критериям; б) его можно применять только для идеально согласованной матрицы, поэтому в данном случае запрещаются отклонения от согласованности, и, следовательно, нельзя вводить избыточные суждения для улучшения обоснованности экспертных суждений; в) наиболее серьезным недостатком является невозможность обобщения мультипликативного синтеза на структуры с взаимной зависимостью и обратными связями, что требуется во многих задачах принятия решений; г) при мультипликативном синтезе всегда сохраняется порядок ранжированных ранее альтернатив, что иногда приводит к плохо интерпретируемым результатам и противоречит многим контрпримерам, свидетельствующим о допустимости изменения порядка при добавлении новых альтернатив.

6. *Сохранение и инверсия порядка.* Можно показать, что изменение (инверсия) порядка ранжированных альтернатив может наблюдаться без

добавления или удаления критериев, а, например, при добавлении нескольких копий одной из альтернатив или в силу других причин. Не оставляет сомнений то, что изменение порядка настолько же свойственно процессам принятия решений, насколько и сохранение. Отсюда следует, что любая теория принятия решений должна иметь, по крайней мере, два способа синтеза; в МАИ они называются дистрибутивным и идеальным способом соответственно. Теория МАИ/МАС включает рекомендации по использованию различных способов синтеза в конкретных ситуациях. Идеальный способ всегда обеспечивает сохранение порядка альтернатив независимо от того, какой способ измерения используется, абсолютный или относительный. Дистрибутивный способ допускает инверсию порядка.

7. *Групповые суждения* следует формировать на основе тщательного анализа индивидуальных суждений, учитывая при необходимости опыт, знания и полномочия каждого человека, вовлеченного в процесс принятия решения. Не следует принуждать участников коллективного выбора к согласию, применять голосование по принципу большинства или другие способы голосования. Теорема о невозможности построения коллективного предпочтения на основе индивидуальных порядковых предпочтений, которая удовлетворяет четырем известным аксиомам, утрачивает свою силу, когда вместо порядковых используются количественные оценки предпочтений в шкалах отношений, как это делается в МАИ. При этом всегда существует возможность построения коллективного предпочтения. Если число участников процесса принятия решения велико, то необходимо применять анкетирование и статистические процедуры для обработки его результатов.

8-2. Шкалы отношений

Отношением называют относительное значение, или частное a/b двух величин a и b, принадлежащих к одному типу данных; оно называется соизмеримым, если его значением является рациональное число, в противном случае отношение будет несоизмеримым. Равенство двух отношений a/b и c/d называют пропорциональностью. Шкала отношений — это набор чисел, инвариантных к подобным преобразованиям (умножение на положительную константу). Инвариантность не соблюдается, когда отношения формируются из произвольных чисел. Например, для измерения веса могут использоваться фунты или килограммы, но отношение весов двух объектов будет одинаковым в обеих шкалах. Обобщением этой идеи является переход к нормированным значениям веса всех измеряемых объектов, которые будут одинаковыми для фунтов и килограммов. Вообще, если градации шкалы отношений обозначить aw_i^*, $i = 1, \ldots, n$, то значения измерений можно представить как $w_i = aw_i^*/aw_i^* = w_i^*/w_i^*$, т. е. $w_i = 1$. В этом случае говорят, что w_i, $i = 1, \ldots, n$, — нормированные значения, которые не зависят от единиц измерения веса или другого свойства. Предметы весом в 2.21 и 4.42 фунта, как и предметы, весящие 1 и 2 килограмма, будут иметь значения $w_1 = 1/3$ и $w_2 = 2/3$ в такой шкале отношений.

В МАИ шкалы отношений выводятся из обратно симметричных матриц парных сравнений $A = \{a_{ij}\}$ в результате решения матричного уравнения:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} w_j = \lambda_{\max} w_i\ , \tag{1}$$

где

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1\,, \tag{2}$$

$a_{ji} = 1/a_{ij}$ или $a_{ij}a_{ji} = 1$, $a_{ij} > 0$. Решением уравнения (1) является нормированный главный правый собственный вектор матрицы A.

Когда $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$, то говорят, что матрица $A = \{a_{ij}\}$ является идеально согласованной, и ее главное собственное значение $\lambda_{\max}$ равно n. Формула (1) получается из следующего матричного уравнения, справедливого для идеально согласованной матрицы A:

$$Aw = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & \cdots & A_n \end{array} \\ \left\| \begin{array}{ccc} \dfrac{w_1}{w_1} & \cdots & \dfrac{w_1}{w_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \dfrac{w_n}{w_1} & \cdots & \dfrac{w_n}{w_n} \end{array} \right\| \end{array} \times \left| \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{array} \right| = n \left| \begin{array}{c} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{array} \right| = nw\,,$$

и из допущения о небольших отклонениях от идеальной согласованности.

Следовательно, чтобы вывести шкалу из матрицы отношений, нужно решить задачу о собственном векторе $A\mathbf{w} = n\mathbf{w}$ или $(A - nI)\mathbf{w} = 0$, которая сводится к решению системы однородных линейных уравнений. Эта система имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель $\det(A - nI)$ обращается в нуль, т. е. когда n является собственным значением матрицы A. При этом ранг матрицы A равен единице, так как каждая ее строка получается путем умножения первой строки на константу. Следовательно, все собственные значения этой матрицы, за исключением одного, равны нулю. Сумма собственных значений матрицы равна сумме ее диагональных элементов, в данном случае n. Компоненты полученного вектора w положительны, и он является единственным с точностью до положительной константы.

Дискретная постановка задачи (1), (2) обобщается на непрерывный случай, который описывается интегральным уравнением Фредгольма второго порядка:

$$\int_a^b K(s,t)\, w(t)\, dt = \lambda_{\max}\, w(s)\,, \tag{3}$$

$$\lambda \int_a^b K(s,t) w(t) dt = w(s)\,, \tag{4}$$

$$\int_a^b w(s) ds = 1\,, \tag{5}$$

где вместо матрицы A мы имеем положительное ядро $K(s, t) > 0$. Заметим, что элементы в матрице $A = \{a_{ij}\}$ зависят от двух переменных i и j, принимающих дискретные значения. Также как матрица зависит от этих дискретных переменных, так и ее обобщение, функция ядра зависит от двух непрерывных переменных. Термин «ядро» связан с ролью, которую эта переменная играет в интеграле, где без нее невозможно определить форму решения. Стандартный способ решения состоит в том, чтобы переместить собственное значение $\lambda_{\max}$ в левую часть (3), где оно будет присутствовать в виде обратной величины. В выражении (4) мы продолжаем использовать символ λ для обратного значения. Выражение (5) соответствует условию нормализации. В непрерывной задаче также должны выполняться условие обратной симметрии (6) и условие согласованности (7):

$$K(s, t)K(t, s) = 1; \tag{6}$$

$$K(s, t)K(t, u) = K(s, u), \text{ для всех } s, t \text{ и } u. \tag{7}$$

Примером ядра описанного типа является функция $K(s, t) = e^{s-t} = e^s/e^t$. Из допущения $s = t = u$ следует, что $K(s, s) = 1$ для всех s, что соответствует единицам на главной диагонали матрицы в дискретном случае. Значение λ, для которого уравнение Фредгольма имеет ненулевое решение $w(t)$, называется характеристическим значением (его обратная величина называется собственным значением), а соответствующее решение называется собственной функцией. Собственная функция определяется с точностью до постоянного множителя. Если $w(t)$ — собственная функция, которая соответствует характеристическому значению λ, и если C — произвольная константа, то при подстановке в уравнение (3) мы можем убедиться, что $Cw(t)$ — тоже собственная функция, соответствующая тому же самому λ. Значение $\lambda = 0$ не является характеристическим, потому что ему соответствует тривиальное решение $w(t) = 0$, не представляющее для нас интереса.

Я хочу рассказать краткую историю появления уравнения Фредгольма в МАИ. Впервые мы заметили связь между уравнением Фредгольма и шкалой отношений в МАИ в конце 1970-х годов вместе с моим студентом Хасаном Айт-Кэси. В начале 1980-х годов мы с моим другом и коллегой, профессором ЛуисомВаргасом, использовали непрерывную постановку задачи о собственном векторе в модели нервного возбуждения и опубликовали несколько статей по данной теме. В декабре 1996 года у меня возникла идея о том, что шкала отношений для процесса электрического возбуждения не была отражена в нашем решении, и ее периодичность следует включить в решение, с которого мы начинали. Многие исследователи, занимающиеся деятельностью мозга, рассматривали нервное возбуждение на модели затухающего периодического генератора. Мой друг Джанос Акзел, признанный в мире ведущим математиком в области функциональных уравнений, познакомил меня с разнообразием решений функционального уравнения $w(as) = bw(s)$. Я доказал в теореме, приведенной ниже, что это уравнение характеризует решение уравнения Фредгольма, и что оно является собственной функцией этого уравнения. Моя работа — это продолжение наших исследований с Луисом Варгасом. Решение соответствует уравнению затухающего периодического генератора, описывающему один период. Оно имеет дополнительное логарифмическое свойство, соответствующее закону Фехнера, который обсуждается ниже.

Матрица является согласованной тогда и только тогда, когда она имеет форму $A = (w_i/w_j)$, которая эквивалентна умножению вектора-столбца $(w_1, \ldots, w_n)^T$ на вектор-строку $(1/w_1, \ldots, 1/w_n)$. Как мы увидим ниже, ядро $K(s, t)$ сепарабельно и может быть представлено в виде $K(s, t) = k_1(s)k_2(t)$.

Теорема 8-1. Ядро $K(s, t)$ согласованно тогда и только тогда, когда оно сепарабельно в форме:

$$K(s, t) = k(s)/k(t). \tag{8}$$

Теорема 8-2. Если ядро $K(s, t)$ согласованно, то решение уравнения (4) имеет вид:

$$w(s) = \frac{k(s)}{\int_S k(s)ds}. \tag{9}$$

В дискретном случае нормированный собственный вектор не зависел от того, умножены ли все элементы матрицы парных сравнений на одну и ту же константу, и, следовательно, мы могли заменить A на aA и получить тот же собственный вектор. При обобщении на непрерывный случай будем иметь:

$$K(as, at) = aK(s, t) = k(as)/k(at) = a[k(s)/k(t)],$$

т. е. K является однородной функцией первого порядка. В общем случае, когда справедливо $f(ax_1, \ldots, ax_n) = a^n f(x_1, \ldots, x_n)$, говорят, что f является однородной функцией n-го порядка. Поскольку K — вырожденное ядро, мы можем заменить $k(s)$ на $k(as)$ и получить $w(as)$. Теперь рассмотрим, каким условиям должна удовлетворять выведенная шкала, чтобы быть шкалой отношений.

Теорема 8-3. Необходимым и достаточным условием того, чтобы $w(s)$ была собственной функцией решения уравнения Фредгольма второго порядка с согласованным ядром, которое представлено однородной функцией первого порядка, является справедливость следующего функционального уравнения:

$$w(as) = bw(s), \text{ где } b = \alpha a.$$

В общем случае затухающую периодическую функцию отклика $w(s)$ можно представить как

$$w(s) = Ce^{\log b \frac{\log s}{\log a}} P\left(\frac{\log s}{\log a}\right),$$

где P — значение периодического фактора для первого периода и $P(0) = 1$.

Мы можем записать решение в виде: $v(u) = C_1 e^{-\beta u} P(u) \approx C_2 \log s + C_3$, где $P(u)$ — периодический фактор для первого периода, $u = \log s / \log a$ и $\log ab \equiv -\beta$, $\beta > 0$. Интересно отметить, что логарифмическая функция появляется в решении в результате его приближенного разложения в ряд. Это подтверждает закон Вебера—Фехнера, который рассматривается в следующем разделе.

8-3. Парные сравнения и фундаментальная шкала

Вместо назначения двух чисел w_i и w_j и последующего формирования отношения w_i/w_j мы выбираем одно число из фундаментальной шкалы абсолютных чисел для представления отношения $(w_i/w_j)/1$. Это — целое число, ближайшее по величине к отношению w_i/w_j. Шкала, выведенная из парных сравнений, покажет, какими будут значения w_i и w_j. В МАИ процедура парных сравнений с использованием фундаментальной шкалы занимает центральное место.

В 1846 году Вебер установил, что люди, удерживая в руках предметы различной тяжести, могли определить различие, например, между весом 20 граммов и 21 грамм, но не могли отличить вес 20.5 грамм по сравнению с весом в 20 или 21 грамм. В то же самое время, не чувствуя различия в весе предметов в 40 и 41 грамм, они могли различить 40 и 42 грамма, и т. д. Мы должны увеличить стимул s на минимальную величину Δs, чтобы достигнуть точки, где наши чувства начнут различать s и $s + \Delta s$. Величина Δs называется предельно значимым различием. Отношение $r = \Delta s/s$ не зависит от s. Закон Вебера гласит, что различие в ощущениях становится заметным, когда значение стимула увеличивается на некоторый постоянный процент от исходного значения. Этот закон справедлив для диапазонов, где значения Δs малы по сравнению с s, следовательно, на практике он не будет соблюдаться, когда значения s являются слишком малыми или слишком большими. В таких случаях необходимо объединение или декомпозиция стимулов в группы (кластеры) или в иерархические уровни, что является эффективным способом расширения области действия этого закона.

В 1860 году Фехнер сформулировал последовательность предельно значимых различий в стимулах, первый член которой обозначен s_0. Исходя из закона Вебера, следующим предельно значимым значением стимула будет

$$s_1 = s_0 + \Delta s_0 = s_0 + \frac{\Delta s_0}{s_0} s_0 = s_0(1+r).$$

По аналогии $s_2 = s_1 + \Delta s_1 = s_1(1+r) = s_0(1+r)^2 \equiv s_0\alpha^2$.

В общем случае будем иметь:

$$s_n = s_{n-1}\alpha = s_0\alpha^n, \qquad n = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом, значимые различиях в стимулах описываются геометрической прогрессией. Фехнер заметил, что соответствующие стимулам реакции должны описываться арифметической последовательностью дискретных точек, в которых наблюдаются предельно значимые различия. Ее можно получить, выразив n из последнего уравнения. Тогда

$$n = \frac{(\log s_n - \log s_0)}{\log \alpha},$$

и реакцию можно представить линейной функцией логарифма стимула. Если реакцию обозначить M, а стимул — s, то психофизический закон Вебера—Фехнера будет иметь вид:

$$M = a\log s + b, a \neq 0.$$

Мы полагаем, что стимулы возникают при формировании суждений о парных сравнениях. Нас интересуют реакции (ощущения), значения которых выражаются в форме отношений. Положив $b = 0$, мы будем иметь $\log s_0 = 0$ или $s_0 = 1$, что возможно при калибровке единичного стимула. Стимул единицы равен s_0. Следующий значимый стимул — $s_1 = s_0\alpha = \alpha$, который дает вторую значимую реакцию $a\log\alpha$. Третий значимый стимул — $s_2 = s_0\alpha^2$, который дает реакцию $2a\log\alpha$. Таким образом, для различных реакций мы имеем последовательность:

$$M_0 = a\log s_0;\ M_1 = a\log\alpha;\ M_2 = 2a\log\alpha;\ \ldots;\qquad M_n = na\log\alpha.$$

В то время как значимые стимулы отношений увеличиваются в геометрической прогрессии, реакции на эти увеличения стимула описываются арифметической последовательностью. Заметим, что $M_0 = 0$, т. е. реакция отсутствует. Разделив каждое M_i на M_1, мы получим последовательность абсолютных чисел 1, 2, 3, ... фундаментальной шкалы (см. табл. 2-1). Парные сравнения выполняются путем распознавания меньшего (доминируемого) из двух элементов, который используется в качестве единицы измерения. Затем с помощью шкалы определяется число или вербальный эквивалент, выражающий превосходство доминирующего элемента в паре. В процессе парных сравнений мы используем ближайшие целые числа из шкалы 1–9, надеясь на слабую чувствительность собственного вектора к малым возмущениям (это будет обсуждаться ниже). Для выражения степени превосходства доминируемого элемента над доминирующим автоматически берется обратное значение. Несмотря на приведенное обоснование целочисленной шкалы, кто-то может в ней сомневаться, предполагая, что другие значения будут лучше, например 1.3 лучше, чем 2. Попробуйте при сравнении влиятельности (авторитета) двух людей выразить авторитет одного из них через авторитет другого и оцените, удобно ли вам будет использовать дробное значение 1.3 вместо целого 2.

Заметим, что в парных сравнениях могут встречаться элементы, для которых требуются числа из девятибалльной шкалы, меньшие, чем 2. Тогда среди близких по предпочтению элементов следует выбрать минимальный и оценить возрастание приращений предпочтений в парах, содержащих этот элемент и остальные близкие к нему элементы. Эти элементы объединяются в группу и сравниваются между собой с использованием чисел из фундаментальной шкалы. Если какие-то приращения отличаются менее, чем в 2 раза, мы можем считать их идентичными, назначив оценку 1, и т. д. В конце концов, компоненты собственных векторов, вычисленных для матриц сравнения приращений в группе, прибавляются к единице, в результате чего получаются ненормированные приоритеты элементов данной группы по заданному критерию. Отметим, что в сравнениях с другими элементами используется только минимальный из элементов группы. Его приоритет используется для умножения на него приоритетов близких элементов, после чего выполняется нормализация полного вектора приоритетов.

Каким должен быть верхний предел шкалы? На качественном уровне люди способны разделить свои ответные реакции на стимулы на три категории: высокая, средняя и низкая. Кроме того, они могут уточнить это деление дальнейшей детализацией каждой категории интенсивности реакций на три степени: высокая, средняя и низкая, таким способом получая девять градаций. Из условия однородности, рассмотренного ниже, вытекает, что для соблюдения согласованности наш рассудок ограничивает число одновременно рассматриваемых объектов. Использование большого количества элементов в одной матрице сравнений приводит к нарушениям согласованности.

8-4. Чувствительность главного собственного вектора ограничивает число сравниваемых элементов и их однородность

В первом приближении, отклонение Δw_1 в главном собственном векторе w_1, возникающее из-за возмущения ΔA в согласованной матрице парных сравнений A, можно представить как:

$$\Delta w_1 = \sum_{j=1}^{n} (v_j^T \Delta A w_1 / (\lambda_1 - \lambda_j) v_j^T w_j) w_j \,.$$

Собственный вектор w_1 нечувствителен к возмущению в матрице A, если главное собственное значение λ_1 отлично от других собственных значений λ_j, и ни одно из произведений $v_j^T w_j$ левого и правого собственных векторов не является очень малым. Следует вспомнить, что компоненты неглавных собственных векторов могут быть отрицательными и комплексными. Можно показать, что все члены $v_j^T w_j$ имеют один и тот же порядок и что произведение нормированных левого и правого главных собственных векторов $v_1^T w_1$ равно n. Если n относительно мало и сравниваемые элементы однородны, ни один из компонентов w_1 не будет слишком малым и, соответственно, ни один из компонентов v_1^T не будет слишком малым. Тогда их произведение не может быть чрезвычайно малым, следовательно, вектор w нечувствителен к малым возмущениям в согласованной матрице A. Из этого можно сделать вывод о том, что n должно быть достаточно малым и что в сравнениях должны участвовать однородные элементы. Позже мы обсудим вопрос о предельном значении n.

8-5. Кластеризация и использование опорных точек для расширения шкалы 1–9 до 1–∞

На рис. 8-1 показана серия сравнений, в результате которых карликовый помидор, в конечном счете, сравнивается с большим арбузом. При этом сначала он сравнивается с обычным недозрелым помидором и лимоном, затем лимон участвует во второй группе сравнений с грейпфрутом и нектарином, где мы делим полученные приоритеты на вес лимона во второй группе и умножаем их на его вес в первой группе, после чего проводятся сравнения нектарина с арбузами в третьей группе и т. д. Таким образом мы можем сравнить по объему карликовый зеленый помидор с большим арбузом, расширяя шкалу от интервала [1–9] до [1–721].

Подобную группировку (кластеризацию) необходимо делать по каждому критерию отдельно. Следует отметить, что в большинстве задач принятия решений может присутствовать один или два уровня кластеров, и, по-видимому, их число может возрастать до трех–четырех смежных диапазонов однородных элементов.

Абрахам Маслоу выделяет семь основных групп (кластеров) общечеловеческих ценностей. В самом грубом приближении можно выделить следующие четыре группы ценностей в порядке убывания важности:

1. Выживание, здоровье, семья, друзья и религиозные убеждения истинно верующих людей.
2. Карьера, образование, качество и образ жизни.
3. Политические и социальные убеждения и ценности.
4. Преходящие идеалы, ценности и привычки. Не имеет значения, кто и как их пропагандирует, но для людей они необходимы так же как, например, умение пользоваться вилкой и ножом.

Категории ценностей могут быть сформированы для группы людей, подобранной по какому-нибудь признаку, для корпорации или для правительства. В процессах анализа очень важных решений может возникнуть

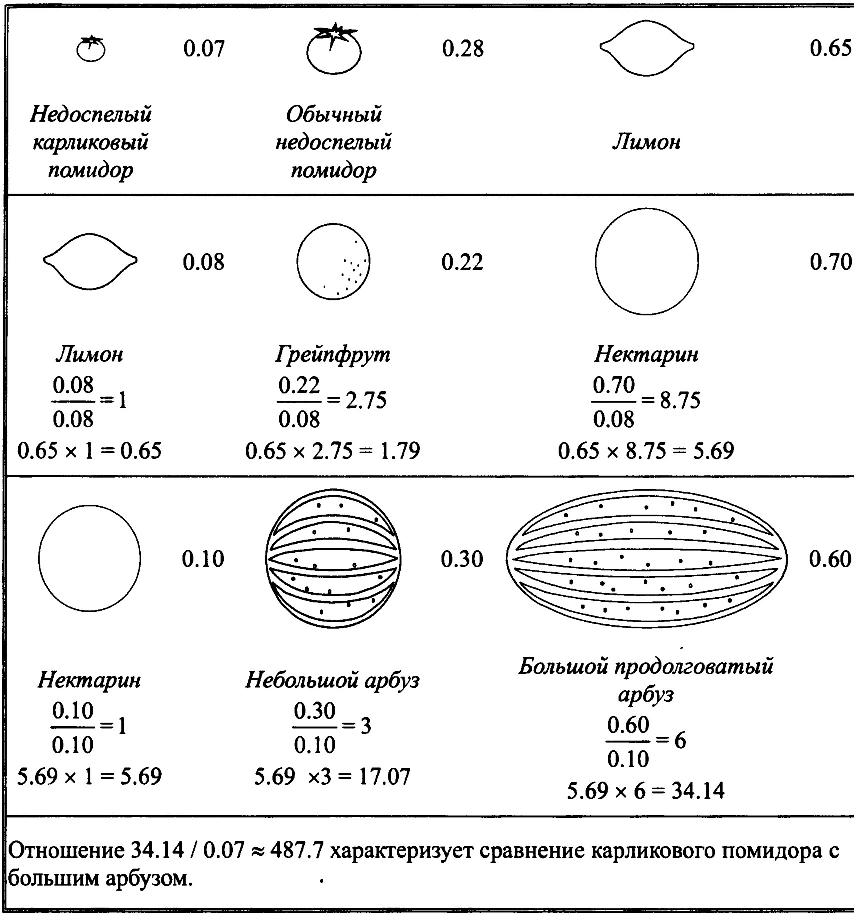


Рис. 8-1. Сравнение объектов по объему

необходимость рассмотрения двух или более категорий. Заметим, что приоритеты в двух смежных категориях могут существенно отличаться (на порядки), поэтому при синтезе элементы с невысокими приоритетами не будут оказывать заметного влияния на окончательное решение. Ограниченный объем книги не позволяет нам детально показать, как можно последовательно сравнить сначала наименее желательные альтернативы между собой, постепенно расширяя набор альтернатив путем добавления в группы все более желательных объектов. Так можно последовательно идти от недостатков к достоинствам, выбирая из рассматриваемых объектов наилучшие, из которых, в конечном счете, будет сформирована новая группа однородных элементов.

8-6. Синтез: как соединить осязаемое с неосязаемым — аддитивный принцип против мультипликативного

Пусть H — полная иерархия, содержащая h уровней, и пусть B_k — матрица приоритетов k-го уровня, $k = 2, \ldots, h$. Если W' является глобальным вектором приоритетов p-го уровня иерархии относительно некоторого элемента z, находящегося на $(p-1)$-м уровне, то вектор приоритетов W на q-м уровне иерархии $(p < q)$ относительно z будет иметь полилинейную (следовательно, нелинейную) форму:

$$W = B_q B_{q-1} \ldots B_{p+1} W' .$$

Глобальный вектор приоритетов элементов самого нижнего уровня относительно цели имеет вид:

$$W = B_h B_{h-1} \ldots B_2 W' .$$

В общем случае $W' = 1$. Чувствительность приоритетов альтернатив нижнего уровня иерархии к изменениям весов элементов на любом уровне можно изучать на приведенной полилинейной форме.

В пятой главе, когда мы рассматривали задачу о покупке дома, было показано, что правильный результат дает не мультипликативный, а аддитивный метод иерархической композиции. Кроме того, мы можем извлечь другой урок из этого примера, который состоит в том, что, когда критерии имеют различные измерения, их важность не может быть определена через измерение альтернатив (снизу вверх по иерархии), а должна устанавливаться в терминах цели (сверху вниз). Если критерии измеряются в разных шкалах, один и тот же способ сравнения критериев относительно цели применяется ко всем критериям, даже если при этом доступны данные физических измерений, поскольку последние могут не отражать действительную важность альтернатив по заданному критерия. Представьте, что вы не располагаете никакими физическими шкалами! Таким образом, процесс парного сравнения критериев относительно критериев более высоких уровней иерархии обеспечивает получение значимых (а не произвольных) результатов, как отмечено двумя выдающимися представителями многокритериальной теории полезности (МКТП) Бьюдом и Максвеллом [1], которые написали о своих собственных экспериментах в принятии решений следующее:

> *«Эти эксперименты демонстрируют, что методы МКТП и МАИ при одних и тех же данных приводят к одинаковым результатам, т. е. очень часто идентифицируют одну и ту же альтернативу как „наилучшую“. Другие многокритериальные методы гораздо в меньшей сте-*

пени совместимы с МКТП, среди них наименьшей согласованностью отличаются методы теории нечетких множеств».

В разделе 5-2 показано, что мультипликативный синтез, обеспечивая сохранение порядка при добавлении (удалении) альтернатив, приводит к некорректным результатам и нарушает некоторые важные принципы МАИ.

Можно вывести приближенное аналитическое выражение, описывающее связь этих двух способов иерархической композиции. Если мы обозначим через a_i приоритет i-го критерия, $i = 1, \ldots, n$, и через x_i — приоритет альтернативы x по i-му критерию, то

$$\prod x_i^{a_i} = \exp\left(\log \prod x_i^{a_i}\right) = \exp\left(\sum \log x_i^{a_i}\right) = \exp\left(\sum a_i \log x_i\right) \approx 1 + \sum a_i \log x_i \approx$$

$$\approx 1 + \sum (a_i x_i - a_i) = \sum a_i x_i.$$

Если требуется, то в это разложение. можно включить остаточный член, чтобы оценить ошибку. Поскольку результаты аддитивного и мультипликативного синтеза достаточно близки, можно подумать, что выбор процедуры не имеет значения. Однако это не так. В работе [2] показано, что, несмотря на близость векторов, вычисленных для каждой матрицы согласованных суждений, результаты синтеза, полученные аддитивным и мультипликативным методами, не только могут привести к различным значениям глобальных приоритетов (что чревато неправильным распределением ресурсов), но даже к различному порядку альтернатив. По этим причинам, а также из-за того, что мультипликативная композиция не обобщается на структуры с зависимостью и обратной связью даже при идеальной согласованности суждений (поскольку умножение матриц в процессе анализа сетей имеет аддитивную природу), я бы не рекомендовал применять мультипликативный синтез. Он может приводить к нежелательному и некорректному ранжированию альтернатив.

8-7. Сохранение и инверсия порядка

Базируясь на предположении о том, что альтернативы решения не зависят друг от друга, рассмотрим вопрос: может ли и должно ли добавление (удаление) новых альтернатив изменять порядок ранжированных ранее альтернатив, если состав критериев не изменяется? Следует отметить, что упорядочивание по приоритетам критериев и подкритериев влияет на порядок сильнее, чем упорядочивание собственно альтернатив, приоритеты которых зависят от приоритетов критериев. Может ли порядок критериев измениться, если в структуру решения включить новые критерии? Почему этот вопрос не вызывает споров и разногласий? Ответ прост: конечно, может. В своей изначальной форме теория полезности предполагала, что важность критериев нельзя оценить и что единственно важными элементами решения являются альтернативы и их полезности по разным критериям. Современные методы теории полезности приблизились к МАИ, допуская оценивание и даже сравнение критериев. Однако вопрос о сохранении порядка ранжированных ранее альтернатив до сих пор не увязывается с вопросом о том, должны ли изменяться веса самих критериев.

Пример о покупке дома из пятой главы дает нам важный урок. Если бы мы добавили четвертую альтернативу к рассматриваемому множеству, то относительные веса критериев *Стоимость* и *Затраты на переоборудование* тоже изменились бы. Таким образом, оценки альтернатив и их количество, которые мы относим к структурным факторам, всегда затрагивают важность критериев. Если критерии несоизмеримы, и их функциональные приоритеты определены в терминах критериев более высокого уровня иерархии, структурное влияние альтернатив на их относительную важность все же сохраняется, т. е. главный вывод заключается в том, что важность критериев всегда зависит от количества и качества альтернатив. Если альтернативы измеряются в различных шкалах, соответствующих разным критериям, становится очевидной необходимость инструмента, который обеспечит учет влияния альтернатив на важность критериев. Таким инструментом является нормализация. Наконец, приоритеты альтернатив в процессе синтеза умножаются на приоритеты критериев, которые зависят от числа и оценок альтернатив. Следовательно, результирующее ранжирование альтернатив зависит от состава всего множества альтернатив. Сохранение порядка во всех ситуациях означает, что приоритеты критериев не должны зависеть от измерений альтернатив, а должны определяться из сравнения их функциональной важности относительно целей, расположенных на более высоких уровнях иерархии. Это подразумевает, что приоритет альтернативы не должен зависеть от измерений других альтернатив. Таким образом, одним из способов сохранения порядка является оценивание альтернатив по отдельности. В МАИ это осуществляется путем абсолютного измерения методом стандартов, которые представляют собой полный набор диапазонов интенсивности с максимальным значением, равным 1. Кроме того, можно обеспечить сохранение порядка и при относительных измерениях, используя в сравнениях идеальную альтернативу.

На вопрос о том, что может или должно происходить с порядком, когда альтернативы зависят друг от друга, обычно отвечают, что случиться может все. Следовательно, когда критерии функционально зависят от альтернатив, что подразумевает зависимость альтернатив друг от друга (так как они зависят от критериев), должна предусматриваться возможность изменения порядка. Метод аналитических сетей (МАС) является обобщением МАИ для задач ранжирования альтернатив на случаи, когда между ними и критериями существуют функциональные зависимости и обратные связи. Даже при таких постановках задач принятия решений могут иметь место случаи, когда существует зависимость между критериями, но критерии не зависят от альтернатив, и порядок должен сохраняться. МАС предназначен для задач с функциональной зависимостью, однако, если критерии не зависят от альтернатив, это отражается в структуре суперматрицы, обработка которой дает результат, совпадающий с МАИ [3, 4].

Из практики известно множество примеров инверсии порядка, но иногда порядок альтернатив сохраняется даже при добавлении новых критериев. В теории полезности требуется, чтобы порядок всегда сохранялся при добавлении (удалении) альтернатив, т. е. он не должен зависеть от *непричастных* альтернатив. Однако каждому правилу, сформулированному для сохранения порядка, можно противопоставить контрпример, который не вписывается в правило. Льюис и Райфа [5] рассмотрели различные варианты правил, пытаясь определить, что должно происходить с порядком, и каждое из этих правил сопровождалось контрпримером. Они формулируют правило, но затем отклоняют его.

> *Добавление новых альтернатив к проблеме принятия решений в условиях неопределенности не может привести к превращению старых, изначально неоптимальных альтернатив в оптимальные. Принцип «все или ничего», заложенный в этом тезисе, может показаться слишком строгим... жесткая критика часто приводит к неблагоразумным результатам.*

В МАИ разработана теория и вычислительные процедуры, обеспечивающие как сохранение порядка, так и допускающие его изменение.

Рекомендации по выбору способа измерения

Дистрибутивный (распределенный, относительный) способ измерения в МАИ дает множество предпочтений путем нормализации множества характеристик, т. е. оценка качества каждой альтернативы делится на сумму оценок всех альтернатив по данному критерию. Из этого следует, что при дистрибутивном способе измерения приоритет заданной альтернативы увеличится, если уменьшатся оценки качества других альтернатив или если некоторые альтернативы будут исключены из рассмотрения.

Идеальный (абсолютный) способ измерения заключается в сравнении оценки качества каждой альтернативы с установленным эталоном. Это означает, что при использовании идеального способа предпочтительность любой альтернативы не зависит от качества других альтернатив, кроме той, которая является эталоном. В работе [6], применяя имитационное моделирование, мы показали, что между этими двумя способами имеются весьма незначительные различия, поэтому вопрос о выборе одного из них возникает только тогда, когда их результаты существенно расходятся.

В работе [7] разработана методика, позволяющая выявить основные различия при переходе от измерения качества альтернатив к измерению предпочтений. Если для ЛПР важна степень доминирования каждой альтернативы над остальными по некоторому критерию, следует применять дистрибутивный способ измерения. Идеальный способ уместен тогда, когда ЛПР интересуется тем, насколько хороша каждая альтернатива по сравнению с известным эталоном. Когда применяется дистрибутивный способ, основанный на концепции доминирования, ЛПР не должен исключать из рассмотрения худшие альтернативы даже после завершения процесса ранжирования. Вот простой тест, позволяющий выбрать метод: *если ЛПР считает, что предпочтительность лучшей (по данному критерию) альтернативы увеличится при уменьшении оценки качества любой другой менее предпочтительной альтернативы, то следует использовать дистрибутивный способ*. Возможно, для ЛПР будет более понятно, если мы попросим его назвать денежную сумму, которую он готов заплатить за лучшую альтернативу. Если ЛПР будет согласен заплатить больше за лучшую альтернативу, узнав, что оценка одной из оставшихся альтернатив была уменьшена, то следует применять дистрибутивный способ.

Например, к задаче о покупке автомобиля два ЛПР могут подходить по-разному, даже если критерии и стандарты — одни и те же. Тот, кто заинтересован в *приобретении автомобиля высокого качества*, должен использовать идеальный способ. Тот, кто хочет *приобрести автомобиль, который будет лучше, чем машины сослуживцев или соседей*, должен использовать дистрибутивный способ.

8-8. Групповое принятие решений

Рассмотрим две проблемы, возникающие при групповом принятии решений. Первая — как объединить индивидуальные суждения, вторая — как построить групповой выбор на основе множества индивидуальных выборов.

Как объединить индивидуальные суждения

Пусть функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для объединения суждений, высказанных n участниками, удовлетворяет следующим условиям:

- *Условие сепарабельности* (S): $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g(x_1)g(x_2)\ldots g(x_n)$ для всех $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на множестве P положительных чисел, где g — функциональное отображение P на собственное подмножество J. Отображение g представляет собой непрерывную, ассоциативную, сокращенную операцию. Условие сепарабельности означает, что индивидуальные суждения могут рассматриваться независимо друг от друга.
- *Условие единогласия* (U): $f(x, x, \ldots, x) = x$ для всех x на множестве P. Условие единогласия говорит о том, что, если все индивидуумы вы-

сказывают одно и то же суждение x, то оно соответствует суждению группы.

- *Условие однородности* (H): $f(ux_1, ux_2, \ldots, ux_n) = uf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $u > 0$, а x_k, ux_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ принадлежат P. Это условие для суждений в форме отношений трактуется так: если все индивидуумы считают, что одна величина в u раз больше другой, то групповое суждение об этом соотношении тоже должно быть равно u.
- *Степенное условие* (P_p): $f(x_1^p, x_2^p, \ldots, x_n^p) = f^p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Например, P_2 означает, что, если k-й индивидуум оценивает длину стороны квадрата как x_k, то групповое суждение о площади этого квадрата будет вычисляться возведением в квадрат коллективного суждения о длине его стороны.
- *Обратное условие* (R): $f(1/x_1, 1/x_2, \ldots, 1/x_n) = 1/f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ для суждений в форме отношений. Это условие означает, что коллективная оценка обратных величин индивидуальных суждений является обратной величиной группового суждения об исходной величине.

В работах [8, 9] приведено доказательство следующей теоремы:

Теорема 8-4. Обобщенными функциями, которые удовлетворяют условиям сепарабельности (S), однородности (H) и единогласия (U), являются среднее геометрическое и среднее степенное. Если, кроме перечисленных условий, соблюдается обратное условие (R) хотя бы для одного кортежа $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ суждений n индивидуумов, где не все x_k равны, то единственной функцией, которая удовлетворяет всем перечисленным условиям, является среднее геометрическое.

Рациональный подход к коллективному выбору основан на предположении: тот, кто больше знает, должен в большей степени влиять на решение, чем тот, кто менее осведомлен. Некоторые люди могут быть более знающими и более рассудительными, другие могут обладать большей властью, и их мнения будут иметь больший вес. При неодинаковой важности участников коллективного выбора функции $g(x_i)$ в (S) могут различаться. При этом условие (S) преобразуется в условие взвешенной сепарабельности (WS):

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = g_1(x_1, w_1)g_2(x_2, w_2)\ldots g_n(x_n, w_n),$$

которое подразумевает, что индивидуальные суждения x_i могут иметь разные веса w_i при синтезе группового суждения.

Для этого случая доказана следующая теорема [8]:

Теорема 8-5. Обобщенными взвешенно-сепарабельными (WS) функциями, удовлетворяющими условиям однородности (H) и единогласия (U), являются взвешенное среднегеометрическое

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^{q_1} x_2^{q_2} \cdots x_n^{q_k}$$

и взвешенное среднестепенное

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt[\gamma]{q_1 x_1^\gamma + q_2 x_2^\gamma + \ldots + q_n x_n^\gamma},$$

где $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = 1$, $q_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $\gamma > 0$.

Если, кроме того, требуется выполнение обратного условия (R), и при этом существует хотя бы один кортеж ($x_1, x_2, \ldots, x_n$) суждений n индивидуумов, где не все x_k равны между собой, то единственной функцией, удовлетворяющей этим условиям, является взвешенное среднегеометрическое. Следующая теорема явно формулирует задачу синтеза на основе предыдущих результатов:

Теорема 8-6. Если $x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$, — ранжирования n альтернатив для m независимых участников, и если a_i — коэффициент важности i-го участника, определенный на иерархии для оценки участников и удовлетворяющий условию $\sum_{i=1}^{m} a_i = 1$, то групповое ранжирование m участников можно представить в виде:

$$\left(\prod_{i=1}^{m} x_1^{a_i}\right), \ldots, \left(\prod_{i=1}^{m} x_n^{a_i}\right).$$

Приоритет i-го участника учитывается копированием суждения этого ЛПР, т. е. его суждение умножается на себя a_i раз.

Как построить групповой выбор на основе индивидуальных выборов

Для заданной группы индивидуумов, множества альтернатив (размерностью больше 2), и множества порядковых предпочтений индивидуумов нобелевский лауреат Кеннет Эрроу доказал *теорему о невозможности*, которая говорит о невозможности формирования рационального выбора группы на основе индивидуальных порядковых предпочтений, удовлетворяющего следующим четырем аксиомам [10]:

Аксиома разрешимости: Выбор группы должен определяться на основе агрегирования индивидуальных предпочтений.

Аксиома единогласия: Если все индивидуумы предпочитают альтернативу A альтернативе B, то процедура агрегирования должна обеспечивать групповое ранжирование, которое показывает, что для группы A предпочтительнее B.

Аксиома независимости: Для двух заданных множеств альтернатив, которые отличаются по составу, но содержат альтернативы A и B, если все индивидуумы предпочитают A по сравнению с B, то процедура обобщения должна обеспечить групповой выбор, указывающий на то, что для группы *A* предпочтительнее *B* независимо от присутствия других альтернатив.

Аксиома равноправия (*отсутствие диктатора*): Ни одно из индивидуальных предпочтений не определяет выбор группы.

Поскольку в МАИ используются шкалы отношений, которые позволяют выразить индивидуальные предпочтения количественными, а не порядковыми оценками, то здесь становится возможным формирование рационального группового выбора, который удовлетворяет всем четырем аксиомам, приведенным выше. Это объясняется следующими причинами:

- Шкалы индивидуальных приоритетов всегда можно получить из матриц парных сравнений, в которых суждения выражены количественными оценками предпочтения и охватывают все множество сравниваемых объектов.
- Количественные суждения о предпочтениях в группе принадлежат шкале отношений, которая представляет относительную интенсивность группового предпочтения.

Литература

1. *Buede D. and Maxwell D. T.* Rank Disagreement: A Comparison of Multi-criteria Methodologies // Journal of Multi-Criteria Decision Analysis. 1995. Vol. 4. P. 1–21.
2. *Saaty T. L. and Hu G.* Ranking by Eigenvector Versus Other Methods in the Analytic Hierarchy Process // Appl. Math. Letters. 1998. Vol. 11. № 4. P. 121–125.
3. *Saaty T. L.* Decision Making with Dependence and Feedback: The Analytic Network Process. RWS Publications, 4922 Ellsworth Avenue, Pittsburgh, PA 15213. 1996.
4. *Vargas L. G.* Reply to Schenkerman's Avoiding Rank Reversal in AHP Decision Support Models // European Journal of Operational Research. 1994. 74. P. 420–425.
5. *Luce R. D. and Raiffa H.* Games and Decisions. New York: Wiley, 1957.
6. *Saaty T. L. and Vargas L. G.* Experiments on Rank Preservation and Reversal in Relative Measurement // Mathematical and Computer Modeling. 1993. 17. № 4/5. P. 13–18.
7. *Millet I. and Saaty T. L.* On the Relativity of Relative Measures-Accommodating Both Rank Preservation and Rank Reversal in the AHP // European Journal of Operational Research. 1999.
8. *Saaty T. L.* Fundamentals of Decision Making and Priority Theory. RWS Publications, 4922 Ellsworth Avenue, Pittsburgh, PA 15213, 1994.
9. *Saaty T. L.* Multicriteria Decision Making: The Analytic Hierarchy Process. RWS Publications, 4922 Ellsworth Avenue, Pittsburgh, PA, 1990.
10. *Peniwati K.* The Analytic Hierarchy Process: The Possibility for Group Decision Making // Proceedings of the Fourth International Symposium on the Analytic Hierarchy Process. Vancouver, Canada, 1996. P. 202–214 (Obtainable from RWS Publications, 4922 Ellsworth Avenue, Pittsburgh, PA 15213).

Приложение 1

Сведения из теории матриц и графов

В данном приложении приведены сведения из теории матриц и теории графов, связанные с материалом книги. Надеемся, что читатель сочтет их полезными.

1. Матрицы

Определения, приведенные в этом разделе, даны в источниках [1–6].

Матрица — это двумерный прямоугольный массив из $m \times n$ чисел, расположенных в m строках и n столбцах. Число, элемент или позиция в i-й строке и j-м столбце матрицы A обозначаются a_{ij}. Таким образом, матрица A размера $m \times n$ имеет вид:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix}.$$

Обычно матрицу обозначают $A = \{a_{ij}\}$, определяя число ее строк и столбцов. Нижние индексы i и j относятся соответственно к строке и столбцу, где расположен элемент a_{ij}. Матрица A называется квадратной матрицей порядка n если $m = n$. Нас будут интересовать главным образом квадратные матрицы, имеющие n строк и n столбцов ($n \times n$).

Строки и столбцы матрицы называются векторами. Матрица A может состоять из единственного вектора-строки или вектора-столбца. В таких случаях для идентификации элемента достаточно одного индекса. Например, матрица $A \equiv \{a_1, \ldots, a_n\}$ является вектором-строкой. Диагональные элементы квадратной матрицы A n-го порядка обозначаются a_{ii}, $i = 1, \ldots, n$. Диагональная матрица A имеет свойство $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$. Если в такой матрице все диагональные элементы $a_{ii} = 0$, то она называется нулевой матрицей и обозначается **0**. Единичная матрица I — это диагональная матрица, в которой $a_{ij} = 1$ для всех $i = j$ и $a_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$. Транспонированная матрица $A = \{a_{ij}\}$ обозначается $A^T = \{a_{ji}\}$ и получается перестановкой элементов из позиций с координатами i, j в позиции с координатами j, i. Другими словами, чтобы получить A^T из A, необходимо поменять местами строки и столбцы матрицы A, пересекающиеся на главной диагонали. Две матрицы равны, если равны их соответствующие элементы. Учитывая это, мы можем определить симметричную матрицу как $A = A^T$; т. е. $a_{ij} = a_{ji}$ для всех i и j. Умножение матрицы A на скаляр k дает матрицу kA, в которой каждый элемент умножен на постоянный множитель k, следовательно, $kA = \{ka_{ij}\}$.

Пусть $A = \{a_{ji}\}$ — квадратная матрица размерности $n \times n$. Матрица A называется неотрицательной ($A \geq 0$), если $a_{ij} \geq 0$ для всех i и j. Матрица A положительна ($A > 0$), если $a_{ij} > 0$ для всех i и j. Матрицу A называют коградиентом к матрице B, если существует матрица перестановок P такая, что $A = P^T B P$. Матрица A приводима, или разложима, если она является коградиентом к матрице вида $\begin{Vmatrix} B_1 & 0 \\ B_2 & B_3 \end{Vmatrix}$, где B_1 и B_3 — квадратные матрицы. В противном случае матрица A неприводима, или неразложима. По определению, матрица с размерностью 1×1 неприводима. Матрица $A \geq 0$ называется примитивной тогда и только тогда, когда существует целое число $m > 0$ такое, что $A^m > 0$. В противном случае матрица будет непримитивной. Матрица называется стохастической по столбцам, если $a_{ij} \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$ для $j = 1, \ldots, n$. Матрица называется стохастической по строкам, если $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ для $i = 1, \ldots, n$. Матрица является дважды стохастической, если она является стохастической по столбцам и по строкам.

Существуют специальные правила для сложения, вычитания, умножения и деления матриц. Эти операции составляют алгебру матриц, подобную алгебре обычных чисел, но имеющую свои особенности, так как правила для обработки обычных чисел не подходят для обработки матриц, требующей применения алгебры более высокого уровня общности. Действительно, матрица порядка 1×1 есть обычное число, называемое скаляром, поэтому все законы, справедливые для матриц, в общем случае должны быть пригодными для этого особого вида матриц и, следовательно, для обычных чисел. Однако алгебра обычных чисел далеко не всегда применима к матрицам. Например, не каждая ненулевая матрица имеет обратную матрицу, а матричное умножение, в отличие от операции умножения чисел, не коммутативно.

Исторически матрицы возникли как метод сокращения записи коэффициентов систем линейных уравнений, а истоки матричного сложения и умножения можно связать с операциями над системами уравнений. В общем виде набор m линейных уравнений с n неизвестными можно представить как

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = y_1; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = y_2; \\ &\ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = y_m. \end{aligned}$$

Запись этой системы можно упростить, если отделить коэффициенты (элементы массива $A = \{a_{ij}\}$) от переменных x_j. Тогда повторяющиеся в каждой строке переменные x_j будут присутствовать в записи только один раз, а именно:

$$\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{vmatrix}.$$

Если представить переменные x_j вектором-столбцом, то необходимо сформулировать правило, по которому можно будет восстановить исходную систему, т. е. установить соответствие для соединения каждого коэффициента a_{ij} с переменной x_j, например a_{32} с x_2, образующих элемент $a_{32}x_2$. Очевидно, что для получения надлежащей зависимости нужно двигаться слева направо по строкам матрицы коэффициентов и вниз по столбцу переменных x_j. Эта достаточно простая процедура явилась базой для создания общего правила матричного умножения.

Мы можем обращаться к значениям $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ как к вектору $\boldsymbol{x}$, а к значениям $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — как к вектору $\boldsymbol{y}$. Заметим, что в общем случае число элементов в $\boldsymbol{x}$ может не совпадать с числом элементов в $\boldsymbol{y}$. Умножение матрицы размера $m \times n$ на матрицу размером $p \times q$ возможно только в том случае, если $p = n$, при этом результатом умножения будет матрица с размерностью $m \times q$. Если $q = 1$, т. е. вторая матрица является вектором, то произведение матриц также будет вектором. Во избежание недоразумений следует помнить, что символы с индексами относятся к элементам матриц или векторов, а символы без индексов — к матрицам или векторам в целом.

Приведенная выше система линейных уравнений является неоднородной системой и в матричных обозначениях записывается $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$. Для решения этой системы можно использовать метод исключения Гаусса. По аналогии с решением скалярного уравнения $ax = y$, результат которого записывается $x = y/a$ или $x = a^{-1}y$, для решения матричного уравнения необходимо найти обратную матрицу для A, т. е. A^{-1}. Если она существует, то решением матричного уравнения будет вектор $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{y}$. Неэффективная, но проверенная временем процедура вычисления обратной матрицы основана на вычислении определителя матрицы A и ее сопряженной матрицы. Если $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$, то однородная система уравнений $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ имеет ненулевое решение только тогда, когда не существует обратная матрица A^{-1}; другими словами $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{0} \equiv \boldsymbol{0}$, и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ является единственным решением. Ниже будет показано, что матрица A не имеет обратной матрицы A^{-1}, когда ее определитель равен нулю. В МАИ мы сталкиваемся с решением однородного матричного уравнения вида $(\lambda_{\max}I - A)\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$. Это уравнение имеет ненулевое решение $\boldsymbol{w}$, потому что $\lambda_{\max}$ — корень характеристического полинома A, который является определителем матрицы $(\lambda I - A)$.

Определитель матрицы A

Чтобы вычислить определитель матрицы, необходимо дать рекурсивные определения минора и алгебраического дополнения. Минор M_{ij}, соответствующий элементу a_{ij}, — это определитель подматрицы, полученной удалением из матрицы A i-й строки и j-го столбца. Алгебраическое дополнение A_{ij} для a_{ij} определяется как $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$. Определитель матрицы A, часто обозначаемый $|A|$ или $\det A$, для заданного i вычисляется как $|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$, или для заданного j: $|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij}$.

Рассмотрим матрицу $A = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 5 & 2 \\ 6 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}$ и вычислим ее определитель $|A|$:

$$|A| = 2 \cdot \begin{Vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix} - 0 \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{Vmatrix} + 1 \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{Vmatrix} - 4 \cdot \begin{Vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 2 \end{Vmatrix} =$$

$$= 2(-7) - 0(-11) + 1(-2) - 4(-10) = 24.$$

При этом каждый минор вычислялся разложением на подматрицы, например:

$$2\cdot\begin{Vmatrix}1 & 5 & 2\\ 4 & 1 & 0\\ 2 & 2 & 1\end{Vmatrix}=2\left(1\cdot\begin{Vmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{Vmatrix}-5\cdot\begin{Vmatrix}4 & 0\\ 2 & 1\end{Vmatrix}+2\cdot\begin{Vmatrix}4 & 1\\ 2 & 2\end{Vmatrix}\right)=2(1-20+12)=2(-7).$$

Матрицу с нулевым определителем называют сингулярной.

Сопряженная матрица

Матрицей, сопряженной с матрицей A, называют матрицу алгебраических дополнений $\mathrm{adj}A = \{A_{ij}\} = \{(-1)^{i+j}M_{ij}\}$. Вычислим $\mathrm{adj}A$ для приведенной выше матрицы A:

$$\mathrm{adj}A=\begin{Vmatrix}-7 & -20 & -29 & 68\\ 11 & 28 & 49 & -100\\ -2 & 8 & 2 & -8\\ 10 & 8 & 14 & -32\end{Vmatrix}.$$

Обратную матрицу A можно вычислить следующим образом: $A^{-1}=\dfrac{\mathrm{adj}A}{|A|}$.

Этот подход не следует использовать для вычислений, так как он неэффективен. Число требуемых операций составляет здесь примерно третью часть от n_5. Можно показать, что $|AB| = |A|\cdot|B|$, из чего следует, что $|\mathrm{adj}A| = |A|^{n-1}$.

Как отмечалось выше, определитель можно получить в результате решения системы уравнений методом исключения. Например, из уравнения $a_{11}x_1 = y_1$ можно выразить $x_1 = \dfrac{y_1}{a_{11}}$, а в системе из двух линейных уравнений

$$\begin{cases}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = y_1,\\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = y_2,\end{cases}$$

исключив первое уравнение и выразив из него переменную:

$$x_2 = \frac{y_1 - a_{11}x_1}{a_{12}},$$

ее можно подставить во второе уравнение:

$$a_{21}x_1 + \frac{a_{22}}{a_{12}}(y_1 - a_{11}x_1) = y_2,$$

которое можно затем преобразовать к виду

$$\left(a_{21} - \frac{a_{11}a_{22}}{a_{12}}\right)x_1 = y_2 - \frac{a_{22}}{a_{12}}y_1$$

и получить решение:

$$x_1 = \frac{a_{12}y_2 - a_{22}y_1}{a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}} = \frac{a_{22}}{a_{11}} \cdot \frac{y_1 - a_{12}y_2}{a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{\begin{Vmatrix} y_1 & a_{12} \\ y_2 & a_{22} \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}},$$

где определитель $|A|$ появляется в знаменателе.

Соответственно переменная x_2 будет равна:

$$x_2 = \frac{\begin{Vmatrix} a_{11} & y_1 \\ a_{21} & y_2 \end{Vmatrix}}{\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}}.$$

Этот подход к решению систем линейных уравнений известен как правило Крамера и может быть обобщен на системы, содержащие n уравнений. Данный способ не является эффективным в вычислительном аспекте, так как кроме вычисления определителя матрицы коэффициентов для каждой переменной x_i необходимо вычислить определители матриц коэффициентов, в которых коэффициенты перед x_i замещены вектором $\boldsymbol{y}$.

Характеристическое уравнение матрицы: собственные значения и собственные векторы

Собственный (характеристический) вектор матрицы A — это ненулевой вектор, для которого выполняется условие $A\boldsymbol{w} = \lambda\boldsymbol{w}$, т. е. преобразование $(1/\lambda)A$ не изменяет $\boldsymbol{w}$. Значения λ, соответствующие такому собственному вектору $\boldsymbol{w}$, называются собственными или характеристическими значениями матрицы A. Таким образом, $\boldsymbol{w}$ является собственным вектором, если он соответствует нетривиальному решению для некоторого числа λ. Компоненты вектора $\boldsymbol{w}$ представляют собой решение однородной системы линейных уравнений с матрицей коэффициентов $(\lambda I - A)$. В данном случае нетривиальное решение системы можно получить, если матрица $(\lambda I - A)$

является сингулярной, т. е. ее определитель равен нулю, $|\lambda I - A| = 0$. Этот определитель является полиномом n-й степени от λ, который имеет вид $\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + \ldots + (-1)^n \mid A \mid$ и называется характеристическим уравнением матрицы A. Корни λ_i, $i = 1, \ldots, n$, характеристического уравнения $|\lambda I - A| = 0$ представляют собой искомые собственные значения. Фундаментальная теорема алгебры утверждает, что полиномиальное уравнение n-й степени имеет n корней (из которых не все могут быть различными). Собственные векторы матрицы A получаются в результате решения соответствующих систем уравнений для каждого λ_i, $i = 1, \ldots, n$. При этом следует учитывать возможность существования кратных корней.

Заметим, что в характеристическом полиноме коэффициент перед λ^{n-1} представляет собой сумму диагональных элементов, или след матрицы A, т. е. $a_1 = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} \equiv trace(A)$.

Кроме того, корни характеристического уравнения, как корни уравнения n-й степени, удовлетворяют условию: $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = a_1 = trace(A)$, а последний член характеристического уравнения является произведением корней $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i = \mid A \mid$.

Мы можем убедиться в этом, разложив характеристический полином на множители $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)\ldots(\lambda - \lambda_n)$. Характеристическое уравнение может иметь кратные корни и, следовательно, общее количество различных корней может быть меньше чем n. Корни характеристического полинома λ_i кратности k присутствуют в его разложении в форме $(\lambda - \lambda_i)^k$. Для простого корня $k = 1$.

Так как λ является постоянным, то из $Aw = \lambda w$ и $A\lambda = \lambda A$ можно вывести $A_2 w = A(Aw) = A(\lambda w) = \lambda Aw = \lambda(\lambda w) = \lambda_2 w$. Таким образом, λ_2 является собственным значением матрицы A_2, и, по аналогии, λ^k — собственное значение A^k.

Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix}, \quad I = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad \lambda I = \begin{Vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{Vmatrix}, \quad (\lambda I - A) = \begin{Vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 3 & 4-\lambda \end{Vmatrix}.$$

Вычислим определитель $|\lambda I - A| = (1 - \lambda)(4 - \lambda) - 6 = \lambda_2 - 5\lambda - 2 = 0$.

Применив известную формулу для вычисления корней квадратного уравнения, получим: $\lambda_1 = \frac{5+\sqrt{33}}{2}$; $\lambda_2 = \frac{5-\sqrt{33}}{2}$.

Чтобы получить собственный вектор, соответствующий λ_1, составим матричное уравнение $Aw = \lambda_1 w$, которое после подстановки значений A примет вид:

$$\begin{Vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{Vmatrix} \times \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix} = \lambda_1 \begin{vmatrix} w_1 \\ w_2 \end{vmatrix}.$$

Для определения вектора w необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} w_1 + 2w_2 = \lambda_1 w_1; \\ 3w_1 + 4w_2 = \lambda_1 w_2. \end{cases}$$

Из первого уравнения можно выразить $w_1 = \dfrac{-2}{1-\lambda_1} w_2$. Поскольку матрица $(\lambda_1 I - A)$ является сингулярной (ее определитель равен нулю, и характеристическое уравнение при подстановке в него λ_1 обращается в 0), то корни ее характеристического уравнения зависимы. Следовательно, решение второго уравнения системы не даст нам новой информации. В этом случае собственный вектор w можно получить, назначая произвольные значения w_2 и вычисляя соответствующие им значения w_1. Приняв $w_2 = 1$, получим следующее решение для собственного вектора: $w = \left\{\dfrac{2}{\lambda_1 - 1}; 1\right\}$.

Вектор w можно нормализовать так, чтобы сумма его компонентов стала равной единице. Для этого разделим каждый элемент вектора на $(w_1 + w_2) = \dfrac{\lambda_1 + 1}{\lambda_1 - 1}$ и в итоге получим $w = \left\{\dfrac{2}{\lambda_1 + 1}; \dfrac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 + 1}\right\}$.

Так как умножение на константу не влияет на решение уравнения $Aw = \lambda w$, мы будем всегда рассматривать нормированные собственные векторы w. Таким же способом мы можем получить собственный вектор для λ_2.

Вспомним, что комплексное число можно представить в виде $a + ib$, где $i = \sqrt{-1}$, a и b — вещественные числа. Модуль комплексного числа $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Комплексное число, сопряженное с $a + ib$, равно $a - ib$, а $(a + ib)(a - ib) = a_2 + b_2$. Собственные значения матрицы, как и корни любого уравнения, могут оказаться комплексными числами, которые существуют в парах с сопряженными числами. Если матрица содержит вещественные элементы и является симметричной, то все ее собственные значения являются вещественными числами, и собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям, попарно (взаимно) ортогональны, например, если $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$ — собственные векторы, то $\boldsymbol{uv}^T = \boldsymbol{vu}^T = 0$. Такими же свойствами обладают Эрмитовы матрицы, которые представляют собой матрицы комплексных чисел, в которых a_{ji} — комплексное сопряжение a_{ij}.

Одна из теорем в теории матриц утверждает, что собственные значения матрицы непрерывно зависят от ее элементов (доказывается так же, как утверждение о том, что корни полинома непрерывно зависят от его коэффициентов).

Получить собственные значения как корни произвольного полиномиального уравнения можно стандартными численными методами, многие из которых реализованы в известных математических пакетах, таких как MATHEMATICA, MAPLE, EISPACK, MATLAB и LAPACK. Если уравнение является характеристическим полиномом матрицы, то в этих пакетах можно также вычислить собственные векторы.

В литературе [7, 8] описаны два метода вычисления характеристического полинома, являющегося определителем матрицы $(\lambda I - A)$. Кроме них существует более эффективный прямой способ получения корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ и их использования для построения характеристического полинома $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \ldots (\lambda - \lambda_n)$.

Квадратная матрица называется верхнетреугольной, если $a_{ij} = 0$ для $i > j$. Матрица A ортогональна, если $A^T A = I$. Любую матрицу с вещественными элементами можно представить как произведение $A = QR$, где Q — ортогональная, а R — верхнетреугольная матрицы. Эффективным способом получения собственных значений и собственных векторов матрицы (который тоже не лишен проблем) является QR-алгоритм, предложенный Дж. Дж. Фрэнсисом в 1961 году. Рассмотрим основные шаги этого алгоритма [9]:

1. Задать матрицу A размером $n \times n$ и число итераций m.
2. Определить матрицу $A_1 = A$.
3. Для $i = 1, 2, \ldots, m$ разложить матрицу $A_i = Q_i R_i$, где Q_i — ортогональная, а R_i — верхнетреугольная матрицы.
4. Вычислить $A_{i+1} = R_i Q_i$.
5. Результатом является матрица $A_m = Q_m^T \ldots Q_1^T A Q_1 \ldots Q_m$, близкая к матрице, ортогональной A, и стремящаяся к верхнетреугольному виду (элементы, расположенные ниже главной диагонали, близки к нулю).

Диагональные элементы матрицы A_m сходятся к собственным значениям матрицы A. В пакетах MATLAB и MATALG для вычисления собственных значений и собственных векторов используется подпрограмма EISPACK.

О НЕПРИВОДИМОСТИ, ПРИМИТИВНОСТИ, ЦИКЛИЧНОСТИ И СТОХАСТИЧНОСТИ

Анализ матриц на неприводимость, примитивность и цикличность является данью истории. До появления компьютеров были необходимы такие математические методы, которые позволяют вычислять предельные значения за конечное число шагов, если предел существует. Свойство неприводимости, фигурирующее в теореме Фробениуса, связано с тем, что неотрицательная матрица имеет единственное главное собственное значение $\lambda_{\max}$ (простой корень). Примитивность матрицы гарантирует отсутствие других корней характеристического уравнения, равных по модулю единице. Для непримитивной матрицы характерно наличие кратных корней из единицы, вызывающих цикличность при возведении матрицы в степени. Заметим, что приводимая матрица может иметь как простые, так и кратные корни, но при этом в обоих случаях могут существовать дополнительные корни уравнения $\lambda_{\max}^{n}-1=0$. При простом корне дополнительные корни из единицы вычисляются точно так же, как в случае неприводимой матрицы [10].

Неприводимость и графы: Суперматрица $W \geq 0$ неприводима тогда и только тогда, когда соответствующий ей ориентированный граф сильно связан. Связный граф называется сильно связным тогда и только тогда, когда каждая его дуга принадлежит хотя бы одному циклу. Наибольший общий делитель c длин всех циклов в сильно связном графе называется индексом непримитивности этого графа. Наибольший общий делитель (*НОД*) длин всех циклов через любую вершину равен c. Индекс непримитивности неприводимой матрицы равен индексу непримитивности ее связного графа. Добавление циклов к существующим вершинам (узлам) графа не влияет на его связность.

Лемма: Матрица W неприводима тогда и только тогда, когда матрица $I + W$ неприводима.

Доказательство: Добавление циклов к вершинам графа не влияет на его связность.

Теорема: Необходимым и достаточным условием того, чтобы неотрицательная матрица W размерности $n \times n$ была неприводимой, является $(I+W)^{n-1} > 0$.

Доказательство: Условие является необходимым, поскольку, если $(I + W)^{n-1} > 0$, то каждая вершина в $(I + W)$ может быть достигнута прохождением пути длиной $(n - 1)$ из каждой другой вершины, следовательно, матрица $(I + W)$ неприводима. В соответствии с леммой, если матрица $(I + W)$ неприводима, то матрица W также неприводима.

Условие является достаточным, так как если матрица $(I + W)$ неприводима, то из любой вершины графа, соответствующего матрице W, можно достигнуть любой другой вершины, пройдя путь, длина которого не больше $n-1$. Следовательно, все элементы матрицы W^{n-1} положительны, кроме, возможно, диагональных элементов. Добавление единичной матрицы I гарантирует положительные элементы на главной диагонали.

Сумма и произведение двух неприводимых матриц, а также любая степень неприводимой матрицы будут неприводимыми матрицами. Если целочисленная степень матрицы неприводима, то исходная матрица также неприводима.

Неприводимость и главное собственное значение. Если W — неприводимая неотрицательная матрица, то ее главное собственное значение является простым корнем характеристического уравнения этой матрицы.

Главное собственное значение неприводимой матрицы доминирует по модулю над главным собственным значением любой из ее подматриц (расположенной на главной диагонали). Для неотрицательной матрицы может соблюдаться условие доминирования или равенства. Неотрицательная матрица W с главным собственным значением λ_{max} приводима тогда и только тогда, когда λ_{max} — собственное значение главной подматрицы W. Неотрицательная матрица W с единственным собственным значением λ_{max} неприводима только в том случае, если матрицы W и W^T имеют положительные главные собственные векторы.

Неприводимость и главный собственный вектор. Если W — неприводимая неотрицательная матрица с главным собственным значением λ_{max}, и $Aw = \lambda_{max}w$, то w — положительный вектор, который можно вычислить с точностью до постоянного множителя. Неприводимая неотрицательная матрица имеет только один собственный вектор w, чьи компоненты удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$. Единственным собственным значением такой матрицы при положительном собственном векторе является λ_{max}.

Неприводимость и примитивность. Если матрица W является примитивной матрицей порядка n, то $m \le n_2 - 2n + 2$, где m — первое значение, для которого $W^m > 0$. Примитивная матрица неприводима. Произведение примитивных матриц не может быть неприводимым, а произведение приводимых матриц может быть положительным и, следовательно, примитивным. Положительная степень примитивной матрицы примитивна. Неприводимая матрица примитивна, если: 1) она имеет положительный след; 2) она имеет ненулевую главную диагональ. Если произведение Адамара $W \times W_2$ неприводимой матрицы W отлично от нуля, то W — примитивная матрица.

Матрица приводима тогда и только тогда, когда матрица $(\lambda_{max}I - A)$ имеет хотя бы один нулевой главный минор порядка $(n-1)$. Неотрицательная матрица A приводима тогда и только тогда, когда один из элементов на главной диагонали ее сопряженной матрицы adj$A$ равен нулю.

Теорема Перрона—Фробениуса

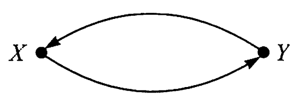
Пусть W — неприводимая неотрицательная матрица. Тогда W имеет собственное значение λ_{max} (называемое главным собственным значением), которое является действительным, положительным и единственным. Все остальные собственные значения λ матрицы W будут $|\lambda| \le \lambda_{max}$. Главному собственному значению λ_{max} соответствует неотрицательный собственный вектор (главный собственный вектор), который является единственным в пределах положительных масштабных преобразований.

Если матрица W примитивная, то для любого собственного значения справедливо неравенство $|\lambda| < \lambda_{max}$, а главный собственный вектор матрицы строго положителен. Если матрица W непримитивная (циклическая) и ее показатель цикличности равен c, то существует c собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_c$, равных по модулю λ_{max}. Все эти собственные значения различны и определяются по формулам:

$$\lambda_1 = \lambda_{max},\ \lambda_2 = \lambda_{max}z,\ \lambda_3 = \lambda_{max}z^2,\ \ldots,\ \lambda_c = \lambda_{max}z^{c-1},$$

где z — комплексное число, $z = e^{2\pi i/c}$, $i = \sqrt{-1}$.

Например, матрица следующего графа неприводима, так как каждый из его узлов достижим из другого.



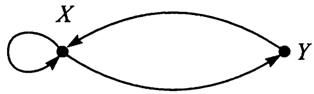
Очевидно, что этот граф дает циклическую матрицу. Рассмотрим матрицу этого графа, чтобы убедиться в этом алгебраическим способом.

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Возводя эту матрицу в степени, получим:

$$A^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad A^3 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \ldots,\quad A^{2k} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix},\quad A^{2k+1} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix},$$

и так далее, т. е. в данном случае не существует единственного предельного результата, потому что матрица A непримитивна. Если к приведенному выше графу добавить цикл в вершине X, как показано на рисунке ниже, мы получим примитивную матрицу.

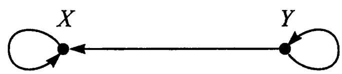


Для данного графа мы имеем:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A^2 = \begin{Vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A^3 = \begin{Vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix},$$

т. е. A^k стремится к единственному пределу, поскольку матрица A примитивна.

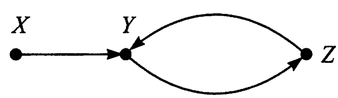
Рассмотрим следующий граф.



Ему соответствует приводимая матрица

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A^2 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A^3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{Vmatrix}, \ldots, \quad A^k = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{Vmatrix},$$

которая не дает циклов при возведении в степени. Однако матрица графа, следующего ниже, приводима и циклична.



$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A^2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \quad A^3 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{Vmatrix}, \quad A^4 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}, \ldots.$$

ПРИМЕЧАНИЕ: Иногда анализ суперматрицы можно существенно упростить, допуская существование внутренних зависимостей между элементами одного компонента (кластера), представленных в суперматрице ненулевыми (единичными) блоками, как было показано добавлением цикла к вершине графа.

Неприводимость и блоки суперматрицы. Общая нормальная форма для неприводимой (в частности, стохастической по столбцам) матрицы определена следующей теоремой.

Теорема: Квадратная матрица A является либо неприводимой, либо может быть преобразована путем перестановок к блочно-диагональной матрице с неприводимыми матрицами-блоками, либо к блочной матрице другого вида, который имеет следующую нормальную форму

$$\begin{Vmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & A_{1,k+1} & \cdots & A_{1m} \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & A_{2,k+1} & \cdots & A_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_k & A_{k,k+1} & \cdots & A_{k+1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & A_m \end{Vmatrix},$$

где, по крайней мере, одна из матриц с двойными нижними индексами отлична от нуля.

Среди неприводимых матриц следует различать два типа: 1) примитивные матрицы, для которых существует некоторое число m такое, что $W^m > 0$ (обычно m — достаточно большое число); 2) матрицы, для которых не существует такого m. Если матрица W — стохастическая по столбцам, она может быть циклической или ациклической. Неприводимая неотрицательная матрица W называется ациклической, если $W^m > 0$ для некоторого m. В противном случае матрица называется циклической с числом циклов $c \geq 2$, если в ней возможна перестановка, приводящая к виду:

$$W' = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & W_c \\ W_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & W_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & W_{c-1} & 0 \end{Vmatrix},$$

где диагональные блоки являются квадратными матрицами, но $W_1, W_2, \ldots, W_c$ могут не быть квадратными матрицами. Тогда степени матрицы W имеют вид:

$$W^c = \begin{Vmatrix} V_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & V_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & V_c \end{Vmatrix},$$

где матрицы $V_1, V_2, \ldots, V_c$ — неприводимые, ациклические матрицы, которые вычисляются по формулам:

$$V_1 = W_c W_{c-1} \ldots W_2 W_1;\ V_2 = W_1 W_c \ldots W_3 W_2; \ldots;\ V_c = W_{c-1} W_{c-2} \ldots W_1 W_c.$$

Стохастические матрицы

Матрица $W \geq 0$ является стохастической тогда и только тогда, когда $WE = E$, где E — матрица размерности $n \times n$, заполненная единицами. Из этого следует, что, если W и X — стохастические матрицы, то WX тоже будет стохастической матрицей. Матрица $W \geq 0$ является стохастической только тогда, когда ее главный собственный вектор, соответствующий главному собственному значению $\lambda_{max} = 1$, равен $\boldsymbol{e} = \{1, 1, \ldots, 1\}^{\mathrm{T}}$. Модули всех собственных значений стохастической матрицы не могут быть больше единицы.

Если W — неприводимая стохастическая матрица, то предельная матрица $W^{\infty} = \lim\limits_{k \to \infty} W^k$ существует тогда и только тогда, когда матрица W примитивна.

Таким образом, если W — неприводимая стохастическая матрица, то она имеет единственное главное собственное значение λ_{max}, равное единице. Любое другое собственное значение λ матрицы W по модулю будет меньше единицы, т. е. $|\lambda| \leq 1$. Если матрица W является еще и примитивной, то все ее собственные значения $|\lambda| < 1$, кроме $\lambda_{max} = 1$. Если W — непримитивная матрица с числом циклов c, то существует c собственных значений, равных по модулю единице.

Стохастичность и теорема Перрона—Фробениуса

Пусть W — неприводимая ациклическая стохастическая матрица. Тогда для всех i, j справедливо

$$\lim_{k \to \infty} W^k = \boldsymbol{w}\boldsymbol{e} > 0;\ W\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w};\ \boldsymbol{e}W = \boldsymbol{e};\ \boldsymbol{e} = \{1, 1, \ldots, 1\}.$$

Вектор-строка $\boldsymbol{w}$ является единственным решением матричного уравнения

$$W\boldsymbol{w} = \boldsymbol{w};\ \sum w_i = 1.$$

Кроме того, сходимость является геометрической [6], т. е. существуют константы $\alpha > 0$ и $0 \leq \beta < 1$ такие, что $|W^k - \boldsymbol{w}\boldsymbol{e}| \leq \alpha\beta^k$; $k = 1, 2, \ldots$, для всех i, j. В качестве β можно взять максимальное по модулю собственное значение матрицы W, отличное от $\lambda_{max} = 1$.

Если матрица W неприводима, но непримитивна (дает циклы при возведении в степень) и число циклов равно c, то все вышесказанное справедливо для любой неприводимой ациклической матрицы $V_1, \ldots, V_c$, расположенной на главной диагонали W^c. Если матрица W приводима, то теорема применяется к каждому отдельному неприводимому блоку матрицы.

2. Графы

Существуют, по крайней мере, две причины, по которым мы нуждаемся в некоторых знаниях о графах в процессе анализа приоритетов влияния. Первая очевидна. Графы — это топологическая модель, которая позволяет структурировать задачи принятия решений, основанные на приоритетах. Мы должны идентифицировать и графически изобразить компоненты, содержащиеся в них элементы, а также связи между элементами и компонентами, показывающие их взаимодействие. Вторая причина связана с представлением неприводимых матриц с помощью графов.

Граф — это множество точек V, называемых вершинами или узлами, и множество линий E, называемых ребрами, для которых задано правило инцидентности, связывающее каждое ребро с вершинами (концевыми точками ребер). Говорят, что вершины инцидентны ребрам. Открытое ребро инцидентно двум разным вершинам. Замкнутое ребро (петля) инцидентно ровно одной вершине, следовательно, его концевые точки совпадают. Ребра не имеют других общих точек, кроме вершин [10].

На графе, представленном на рис. 1, приведены примеры: v_1 и v_2 — вершины; e_1 — петля в вершине v_5 (одна концевая точка); e_2 — открытое ребро с концевыми точками v_2 и v_3.

Два ребра, имеющие общую вершину, или две вершины, которые являются концевыми точками одного ребра, называются смежными. Вершину называют изолированной, если она не инцидентна ни одному ребру. Мы будем обозначать граф $G = (V, E)$.

Подграф графа G — это подмножество V_1 множества вершин V и подмножество E_1 множества ребер E с такой же инцидентностью между вершинами и ребрами, как в G.

Граф называется простым, если он не имеет циклов и параллельных ребер, т. е. нескольких ребер между парой вершин. В основном, мы будем рассматривать простые графы, а в тех случаях, когда они не будут являться

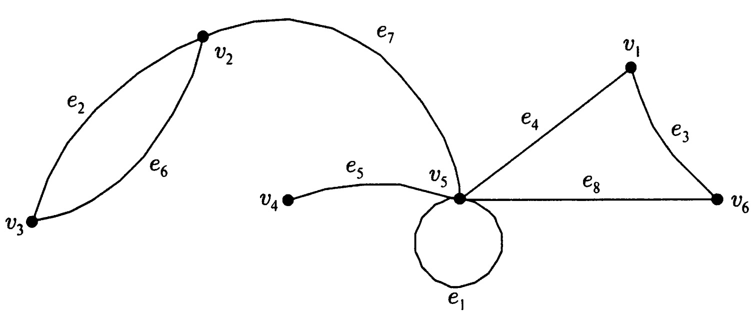


Рис. 1. Пример неориентированного графа

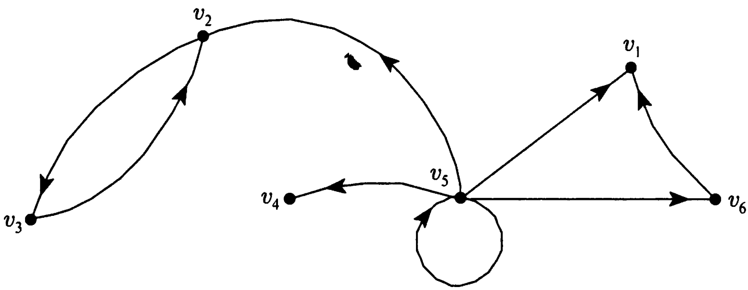


Рис. 2. Пример направленного (ориентированного) графа

таковыми (т. е. будут содержать циклы и параллельные ребра), будем это пояснять.

Ребра графа могут иметь направление (ориентацию), обозначенное стрелкой. В таких случаях говорят о направленных или ориентированных графах, в которых ребра называют дугами. Направленный граф будем обозначать $\boldsymbol{D} = (V, A)$. Пример такого графа приведен на рис. 2.

Число ребер, инцидентных вершине $v \in V$, называется степенью вершины и обозначается $d(v)$. Мы будем обозначать $d^-(v)$ число дуг, направленных к v, и $d^+(v)$ — число дуг, выходящих из v. При определении степени вершины инцидентность цикла считается дважды. Для изолированной вершины $d(v) = 0$.

Для графа $\boldsymbol{G} = (V, E)$ обозначим количество вершин $|V|$ и количество ребер $|E|$. Число вершин называется порядком графа. Граф на рис. 3 имеет $|V| = 7$ и $|E| = 10$. Граф называется конечным, если значения $|V|$ и $|E|$ конечны, и бесконечным, если любая из этих величин бесконечна. Мы будем рассматривать только конечные графы. На рис. 3 степень вершины v_1 равна 5, т. е. $d(v_1) = 5$; а вершина v_7 — изолированная, т. е. $d(v_7) = 0$.

Последовательность k ребер $\{e_1, ..., e_k\}$ в графе $\boldsymbol{G}$ называется маршрутом (путем), если существует последовательность из $k + 1$ (не обязательно различных) вершин $\{v_0, v_1, ..., v_n\}$ таких, что e_i инцидентно v_i и v_j, $i, j = 1, ..., n$. Маршрут называют замкнутым, если $v_0 = v_n$, и разомкнутым (открытым) в противном случае. Если $e_i \neq e_j$ для всех i и j, $i \neq j$, маршрут называется цепью. Замкнутая цепь называется контуром. Если все вершины различны, маршрут называется простой цепью, в то время как если две вершины совпадают, например $v_1 = v_n$, мы имеем простой контур, который может существовать при условии $n \geq 3$. Пример простой цепи на рис. 3 задан последовательностью ребер

$$\{e_3, e_2, e_1, e_8\} \equiv \{(v_4, v_3), (v_3, v_2), (v_2, v_1), (v_1, v_6)\},$$

где каждое ребро заменяется парой вершин, которые являются его концевыми точками и следуют друг за другом в данном маршруте $\{v_4, v_3, v_2, v_1, v_6\}$.

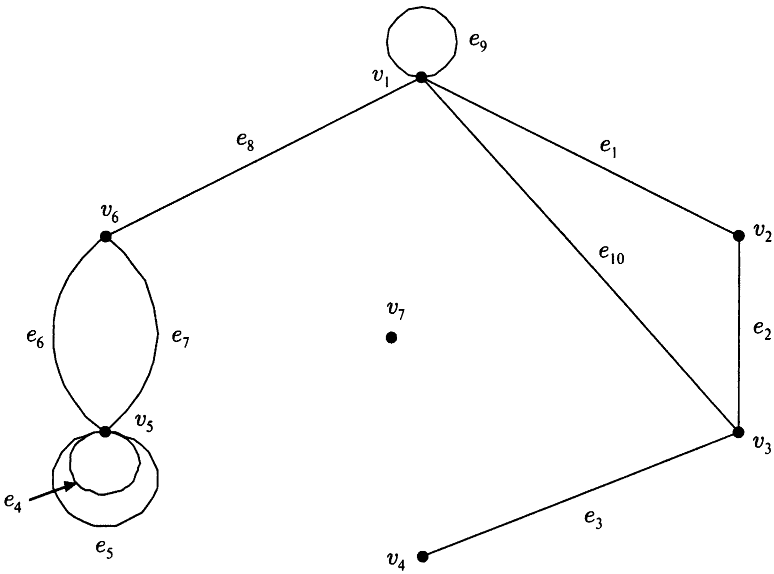


Рис. 3. Пример графа с 7 вершинами и 10 ребрами

Аналогичные определения можно дать для ориентированных графов с учетом направленности дуг, т. е. определить направленные маршруты (пути) и контуры (циклы), а также простые пути и простые циклы.

Граф называется связным (сильно связным) в ненаправленном (направленном) смысле, если имеется простая цепь (путь) между любой парой его вершин. Граф, содержащий $n + 1$ вершин, называется n-связным, если после удаления из него $n - 1$ или меньшего количества ребер, он остается связным. Две цепи называют непересекающимися (параллельными), если они не имеют общих вершин, за исключением, возможно, конечных точек.

Максимальным связным подграфом C графа G называется связный подграф, в котором любая вершина, смежная с вершинами из C, также принадлежит C, и все ребра графа G, инцидентные вершинам в C, принадлежат C.

Поддеревом называется связный подграф, не имеющий циклов (контуров). Связующее дерево — это максимальное поддерево, которое содержит все вершины графа. Ребро графа, не входящее в дерево, называется хордой. Ребра графа, принадлежащие дереву, называют ветвями. При добавлении хорды к связующему дереву получается цикл, называемый фундаментальным циклом (контуром). На рис. 4 показано связующее дерево направленного графа. Корнем дерева является вершина v_0, из которой начинаются все пути на дереве.

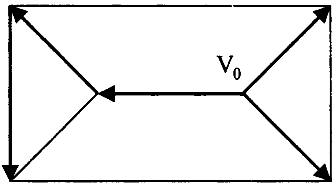


Рис. 4. Связующее дерево графа

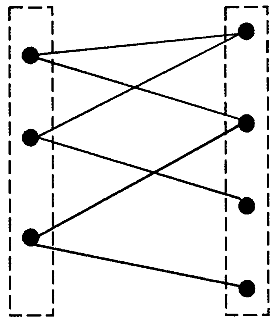


Рис. 5. Пример двудольного графа

Специальный тип цикла в графах, важный для практических приложений, назван по имени известного ирландского математика Уильяма Роуана Гамильтона (1805–1865). Гамильтоновым называется цикл, который проходит через каждую вершину графа только один раз. Именем швейцарского математика Леонарда Эйлера (1707–1783) названы графы, в которых из ребер формируется цепь, включающая каждое ребро только один раз. Цепь может быть разомкнутой или образовывать цикл.

Простой граф $G = (V, E)$, имеющий число вершин $|V| = n$ и такой, что каждая пара вершин соединена ребром, называется полным графом для n вершин. Легко убедиться, что полный граф имеет $n(n-1)/2$ ребер. Мы называем такой граф полным, потому что любые два полных графа, имеющие одинаковое число вершин, изоморфны.

Граф называется двудольным, если его вершины можно разделить на два непересекающихся множества так, что в нем не будет других ребер, кроме тех, которые соединяют вершины одного множества с вершинами другого. Пример такого графа показан на рис. 5.

Важным понятием в теории графов является понятие связности. По существу, бо́льшая часть алгоритмической теории графов затрагивает проблемы связности, ее избыточности или отсутствия в графе.

Граф является несвязным (или разъединенным), когда множество вершин V можно разделить на два множества V_1 и V_2, и при этом не существует ни одного ребра, соединяющего вершину из V_1 с вершиной из V_2; в противном случае говорят, что граф является связным. Две вершины могут не иметь общего ребра, но могут быть взаимно достижимыми по некоторой цепи. Если на графе существуют цепь, соединяющая каждую пару вершин, то говорят, что граф связный. Эти два определения связности эквивалентны; иногда возникает необходимость в использовании первого определения, но второе определение используется чаще, так как оно шире и открывает целую область проблем достижимости или маршрутизации на графах и подграфах. Например, нас могут интересовать вопросы:

возможен ли последовательный обход графа из некоторой вершины без повторного прохождения вершин? Можем ли мы совершить последовательный обход графа с возвратом в начальную вершину? Существует ли на графе простая цепь, соединяющая все вершины и начинающаяся в заданной вершине, и является ли она замкнутой? Можно ли проделать все перечисленное, рассматривая подграфы, включающие $n - 1$ вершину?

Другая проблема касается степени связности графа. Существует два подхода к ее решению: 1) анализ ребер графа; 2) анализ вершин графа. Граф можно разделить, одновременно удалив несколько ребер. Минимальный набор таких ребер известен как разрез, а наименьшее число граней в разрезе называют степенью связности графа. Степень связности дерева равна единице. Очевидно, что дерево представляет собой граф, который характеризуется минимальной степенью связности. С другой стороны, если из цикла удалить ребро, граф останется связным и может превратиться в дерево.

Существует два способа разделения графов методом удаления вершин. Первый способ связан с понятием степени вершины. Например, если из дерева удаляется вершина со степенью два, и вместе с ней удаляются инцидентные ей ребра, то оставшийся граф будет несвязным. С другой стороны, если исходный граф представляет собой простой цикл, в котором каждая вершина имеет степень два, то удаление вершины не сделает граф несвязным. Кажется вполне разумным предположение о том, что, чем выше степени вершин, тем выше степень связности графа. Однако это предположение является весьма абстрактным и нуждается в уточнении, учитывающим контекст конкретной проблемы.

Вершина графа называется точкой расчленения или разделяющей вершиной, если ее удаление делает граф несвязным. Кратность разделяющей вершины — это число компонентов, на которые распался граф после ее удаления. В графе может быть несколько вершин, являющихся точками расчленения. Например, на рис. 3 вершины v_1 и v_6 являются точками расчленения, а вершина v_5 нет. Набор точек расчленения образует множество разделяющих вершин графа, которые (в контексте сетей коммуникаций) могут рассматриваться как множество уязвимых мест графа. Граф может не иметь точек расчленения (такой граф называется неразделимым), однако его можно разделить, удалив k вершин одновременно. Набор таких вершин называется разделяющим множеством k-го порядка.

Граф называется k-связным для $0 \le k < n$, если удаление $k - 1$ вершины (или меньшего числа вершин) не разъединяет его на несвязные части. Любая пара вершин такого графа может быть связана k параллельными цепями (из которых любые две цепи не имеют общих вершин). Граф, не имеющий разделяющего множества вершин k-го порядка, называется k-неприводимым. В противном случае его называют k-приводимым.

До сих пор мы говорили о ненаправленных графах. Вопросы связности несколько усложняются при анализе ориентированных графов. При этом граф может быть сильно связным в ненаправленном смысле, но слабо связным в направленном смысле. Это происходит потому, что может существовать путь из одной вершины в другую, но не наоборот. Очевидно, что важную роль в сильно связных графах играют циклы.

Матрица смежности и число путей на графе

Часто возникает вопрос о том, почему возведение матрицы суждений или суперматрицы в k-ю степень позволяет определить для ее элементов, соответствующих вершинам, количество путей длиной k. Матрица вершин помогает разобраться с этим вопросом. Матрицу вершин (или матрицу смежности) можно построить как для ориентированных, так и для ненаправленных графов. Элемент в позиции (i, j) матрицы равен числу ребер, инцидентных вершине i и вершине j (или направленных из вершины i к вершине j в случае ориентированного графа). Таким образом, для направленного графа (см. рис. 2) мы имеем:

$$\vec{V} = \begin{array}{c} \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 & v_6 \end{array} \\ \left\| \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\| \end{array}.$$

Теорема: Матрица $\vec{V}^n$ дает число путей длины n между любыми двумя вершинами направленного графа.

Доказательство: Если a_{ik} — число дуг, соединяющих v_i с v_k, и a_{kj} — число дуг, соединяющих v_k с v_j, то $a_{ik}a_{kj}$ — число различных путей, каждый из которых состоит из двух дуг, соединяющих v_i с v_j и проходящих через вершину v_k. Если вычислить сумму этих значений по всем k, т. е. по всем промежуточным вершинам, можно получить количество путей длиной 2 между вершинами v_i и v_j. Если затем сформировать $a_{ij}a_{jm}$, где $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$, то получим число различных путей длиной 3 между вершинами v_i и v_m, проходящих через v_k и v_j, и т. д. Таким образом, если предположить, что теорема истинна для $\vec{V}^{n-1}$, то элементы матрицы $\vec{V}^n = \vec{V}^{n-1}\vec{V}$ будут равны числу путей длины n между соответствующими вершинами. Аналогичная теорема справедлива для ненаправленных графов.

Иногда, анализируя граф с определенными свойствами, мы подразумеваем его матрицу смежности. Например, говорят, что ориентированный граф является примитивным, если он сильно связен. Эта формулировка отражает факт, что для примитивной матрицы $\vec{V}$ при некотором целом $m > 0$ матрица $\vec{V}^n > 0$. Сильно связный граф $\boldsymbol{D} = (V, A)$ с $n \geq 2$ вершинами будет примитивным тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель длин всех простых циклов в $\boldsymbol{D}$ равен единице. Обобщением понятия матрицы вершин является матрица путей, в которой используются числовые оценки суждений. Возведение такой матрицы в степени дает оценку доминирования одного элемента над другим вдоль пути, длина которого равна показателю степени.

Литература

1. *Horn R. A. and Johnson C. R.* Matrix Analysis. New York: Cambridge University Press, 1992.
2. *Gantmacher F. R.* Applications of the Theory of Matrices. New York: Interscience Publishers, 1959.
3. *Lancaster P. and Tismenetsky M.* The Theory of Matrices. Orlando: Academic Press Harcourt Brace Jovanovich, 1985.
4. *Berman A. and Plemmons R. J.* Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences. New York: Academic Press, 1979.
5. *Minc H.* Nonnegative Matrices. New York: John Wiley & Sons, 1988.
6. *Cinlar E.* Introduction to Stochastic Process. Prentice-Hall; Englewood Cliffs, 1974.
7. *Leverrier.* Sur les Variations Reculaire des Elements des Orbites pour les Sept Planetes Principales // J. de Math. 1840. 5. P. 230.
8. *Faddeev D. K.* On the Transportation of the Scalar Equation of a Matrix // Trudy Inst. Inzh. Prom. Stroit. Leningrad, 1937. 4. P. 78–86.
9. *Cullen C. G.* An Introduction to Numerical Linear Algebra. Boston: PWS publishing Co., 1994.
10. *Busacker R. G. and Saaty T. L.* Finite Graphs and Networks. New York: McGraw-Hill Book Company, 1965.

Приложение 2

Отказ от принципа инвариантности в анализе решений

Разрушение иллюзии о том, что порядок всегда должен сохраняться

1. Введение

Предполагаемую закономерность человеческого поведения перестают считать естественной, когда находятся примеры, которые ее опровергают. Проверку гипотез о закономерностях можно выполнить теоретически или экспериментально. Даже в тех случаях, когда закономерность признана и используется как нормативный принцип при выборе решений или действий, ее следует отклонить, если она часто и неумышленно нарушается на практике. Именно так произошло с *принципом инвариантности* в теории принятия решений.

Сомнения в истинности принципа инвариантности, который в теории полезности формулируется как аксиома независимости от непричастных альтернатив, возникли более 20 лет тому назад, когда в 1974 году были опубликованы первые контрпримеры [1]. Суть принципа инвариантности заключается в том, что многокритериальное ранжирование набора альтернатив не должно изменяться при добавлении новых или удалении существующих альтернатив, если при этом состав критериев остается прежним. В контексте, учитывающем увеличение вероятности изменения персонального выбора, инвариантность называется регулярностью.

На каком основании следует считать, что принцип инвариантности является абсолютной истиной, и как можно кого-нибудь убедить в том, что этот принцип должен быть нормативным законом поведения? Вероятно, принцип инвариантности является следствием определенных размышлений. Например, кто-то выполнил оценивание множества альтернатив по набору критериев, при этом каждая альтернатива рассматривалась отдельно и получала оценку, которая не зависела от количества и качества других альтернатив, упорядоченных до или после оценивания данной альтернативы. В данном случае нет никаких причин, по которым добавление новой альтернативы должно затронуть ранжирование уже исследованных альтернатив, если вместе с ней не вводятся новые критерии, в терминах которых должно быть проведено дополнительное оценивание всех альтернатив. Но в жизни встречаются более сложные ситуации. Часто мы упорядочиваем альтернативы, сравнивая их между собой по каждому критерию. Способность к сравнению — врожденное свойство каждого человека. Насколько мы можем осознать, как зависит положение альтернативы в упорядоченном наборе от известного нам расположения других альтернатив? Мы никогда не смогли бы понять, насколько хорошей является альтернатива по данному критерию, если бы не имели знаний (или измерений) о качестве других альтернатив. Это особенно актуально для неосязаемых критериев. Когда рассматриваемый критерий характеризует физическое свойство, то его интенсивность можно более или менее точно измерить для каждой альтернативы и затем решить, насколько желательна такая интенсивность. Если для оценивания альтернатив используются неосязаемые критерии, необходимы экспертные суждения, которые требуют от эксперта опыта и знаний о свойствах многих альтернатив. Раздельное оценивание альтернатив (по одной) — это частный случай процесса парного сравнения, так как для создания шкал интенсивностей по критериям, которые применяются для раздельного оценивания альтернатив, необходимы парные сравнения.

Рационалистические аксиомы о сохранении порядка, сформулированные в теории полезности, можно сравнить с утверждениями математиков XVIII века о том, что мир является евклидовым пространством. Позднее было установлено, что это убеждение основывалось на предположениях о геометрии, которые удовлетворяли пятому постулату Евклида, известному как аксиома параллельности, а не на свойствах реального пространства. В те времена полагали, что Бог создал людей, наделив их априорным знанием евклидовой геометрии, так как не допускали существования других представлений о пространстве. В XIX веке эти предположения о геометрии были оспорены Лобачевским, Больья и Гауссом, и в результате появилась неевклидова геометрия, которая оказалась столь же последовательной, как геометрия Евклида, но более адекватной реальному миру, что через много лет показала теория относительности. Всегда считалось, что кратчайшим расстоянием между двумя точками является прямая линия (и это истинно в локальном или микроскопическом масштабе). На сфере кратчайшее расстояние между точками измеряется вдоль дуги большого круга. Теория относительности показала, что в глобальном масштабе гравитация притягивает световой пучок, заставляя его перемещаться по изогнутой геодезической линии.

Догма о сохранении порядка напоминает одно из старых убеждений в том, что логическая теория способна ответить на все вопросы, возникающие в ее рамках. Но Курт Гедель показал, что в логической теории могут возникать вопросы, на которые нельзя ответить на основе аксиом этой теории, однако искомые ответы могут быть найдены в другой логической системе с более широким набором аксиом, подмножеством которой является исходная теория. Механистические представления, возникшие из-за необходимости построения функций полезности, привели к вопросу о том, всегда ли возможно раздельное (поочередное) оценивание независимых альтернатив. Ответ на этот вопрос оказался отрицательным, потому что во многих ситуациях альтернативы можно оценить только в относительных терминах, рассматривая их одновременно, при этом добавление новых альтернатив или удаление старых может изменять полученное ранее ранжирование.

2. Обсуждение

Приведем два примера неоправданной инверсии порядка из работы [1].

Пример 1. Леди из маленького города желает купить шляпку. Она приходит в единственный в городе магазин и находит две шляпки, a и b, которые ей одинаково нравятся, хотя она склоняется к a. Предположим, что затем продавец предлагает ей третью шляпку a_1, идентичную a. Тогда леди, скорее всего, выберет шляпку b, пытаясь избежать риска увидеть кого-то в такой же шляпке, как у нее. Этот результат противоречит утверждению о *регулярности*.

Пример 2. Гость, приглашенный на обед, из уважения к хозяину воздерживается от выбора самого дорогого и самого предпочитаемого им блюда, а выбирает менее дорогое, таким способом увеличивая приоритет менее предпочтительного блюда, что снова противоречит регулярности.

Заметим, что, если бы вместо шляпки леди покупала компьютер, то она могла бы выбрать тот, который ей больше нравится, несмотря на наличие множества подобных образцов. Хотя не исключено, что и при выборе компьютера ее предпочтения будут оставаться такими же, как для шляпок. Если при этом для выбора шляпки и компьютера используется одинаковое количество критериев, смысл которых, конечно, различается, то приоритеты моделей компьютеров будут такими же, как приоритеты шляпок. То есть численные результаты в этих двух примерах будут идентичными при разной семантике. Что из этого следует?

Из приведенных примеров можно извлечь два урока. Первый состоит в том, что ЛПР не должен беспокоиться о том, сохраняется ли порядок, так как это не предписывается абстрактной структурой реальной проблемы. Другой урок заключается в том, что в разнообразных ситуациях многокритериального выбора невозможно использовать единственную процедуру для агрегирования предпочтений. Для сохранения порядка нам нужна одна процедура, а для ситуаций, в которых порядок может изменяться, — другая. Очевидно, что результат принятия решения зависит от используемых математических методов и процедур. В связи с этим, выбор математического метода должен основываться на глубоком и всестороннем понимании проблемы принятия решения, при этом метод должен отражать природу процесса выбора, существующего в реальной жизни, а не диктовать, что нужно делать, чтобы принять обоснованное решение.

В примере с выбором шляпки некоторые предлагали ввести такой надуманный критерий, как *уникальность*, который бы делал более предпочтительную шляпку менее желательной. Уникальность и многочисленность — это свойства, присущие группе объектов, которые не являются характерными признаками отдельной шляпки. Такие критерии требуют, чтобы ЛПР увидел другие шляпки, для того чтобы определить, является ли данная шляпка уникальной. Но это подразумевает, что при ранжировании шляпок нужно предположить зависимость альтернатив друг от друга, что нарушает другую аксиому теории полезности, которая требует взаимной независимости альтернатив. Заметим, что при добавлении альтернатив, которые могут вводить в рассмотрение новые критерии, если этот процесс продолжать достаточно долго, то, в конечном счете, список новых критериев будет исчерпан, и прежние предпочтения могут измениться за счет добавления новых альтернатив. Нет никакой возможности уйти от этого факта. Вообще в задачах принятия решений число альтернатив может быть намного больше, чем количество критериев. Чтобы учесть влияние количества объектов, требуется процедура, которая будет автоматически вычислять число рассматриваемых альтернатив и желательность каждой из них. Такой процедурой является относительное измерение альтернатив в процессе формирования матриц парных сравнений с последующим выводом шкал отношений.

В области маркетинга известны примеры изменения ранжирования, вызванного влиянием несуществующих альтернатив (фантомов). Рассмотрим такой пример. Производитель автомобилей продает два типа машин — один недорогой, но не такого высокого качества, как другой. Чтобы привлечь покупателей к покупке более дорогого автомобиля, производитель объявляет о скором появлении на рынке нового автомобиля, который будет обладать качеством лучшего из его автомобилей, но будет иметь гораздо более высокую стоимость. Эта информация приводит к изменению предпочтений покупателей, и они начинают покупать более дорогой из двух представленных на рынке автомобилей. На самом деле производители никогда не делают «фантомов». Это — хорошо известный рекламный трюк. Существуют другие разновидности этого трюка, которые могут приводить к инверсии порядка. Для многих задач принятия решений ранжирование следует выполнять не один раз, а трижды: по выгодам, по издержкам и по рискам. Комплексное ранжирование получается путем деления выгод на издержки и риски (или путем вычисления другой обобщенной функции). Таким образом, сложная проблема принятия решения включает не одну, а несколько задач. Существуют ситуации, когда результат определяют только выгоды или только издержки, так как один аспект может оказаться мало значимым по сравнению с другим. При таком подходе добавление новых альтернатив к структурам выгод, издержек и рисков будет вызывать естественное изменение порядка альтернатив.

Метод анализа иерархий — это теория принятия решений, основанная на относительном измерении, в котором шкалы отношений выводятся из парных сравнений. МАИ имеет процедуру, обеспечивающую сохранение порядка в соответствии с принципом инвариантности. Использование абсолютного способа измерения в МАИ позволяет вычислить приоритеты интенсивностей для каждого критерия, которые затем делятся на приоритет самой высокой интенсивности по критерию, и таким образом создается представление об идеальной альтернативе. Ранжирование с применением абсолютных оценок не будет изменяться при изменении множества альтернатив, т. е. порядок будет сохраняться. Но, помимо этого, в МАИ существует процедура, которая применяется в тех случаях, когда порядок может и должен изменяться. Эксперименты показали, что результаты, полученные этими двумя методами (с сохранением и инверсией порядка), отличаются только в 8 % случаев [2, 3]. Аналогичные данные были получены для двух лучших альтернатив, двух худших и т. д.

3. Инвариантность и рациональность

Аксиома о сохранении порядка в числе других сформулирована в книге Льюиса и Райфы [4], которые пишут:

> *«Добавление к задаче принятия решений в условиях неопределенности новых альтернатив, которые являются слабо доминирующими или эквивалентными одной из имеющихся альтернатив, не влияет на оптимальность прежних альтернатив»*

и конкретизируют это:

> *«Если альтернатива не является оптимальной в задаче принятия решений с неопределенностью, она не может стать оптимальной в результате добавления новых альтернатив».*

Далее они делают акцент на следующем:

> *«Добавление новых альтернатив не может сделать старые, изначально неоптимальные альтернативы оптимальными, и может сделать первоначально оптимальную альтернативу неоптимальной только в том случае, если, по крайней мере, одна из новых альтернатив является оптимальной»*

и даже доходят до крайности:

> *«Добавление новых альтернатив к проблеме принятия решений с неопределенностью никогда не превращает старых, изначально неоптимальных альтернатив в оптимальные».*

Их окончательное заключение:

> *«Принцип „все или ничего", выраженный в последней формулировке, может показаться слишком строгим... слишком жесткая критика часто приводит к неблагоразумным результатам».*

Некоторые специалисты в области принятия решений приняли принцип инвариантности как главный постулат так называемой нормативной теории. Нормативная теория предписывает единственный «верный» способ для принятия решений. При этом очень важно понимать, что называется рациональностью. Чтобы быть «рациональным», ЛПР должен воспринимать реальную ситуацию в свете аксиом теории полезности. Принципы инвариантности и рациональности приводят к парадоксам, потому что на практике существуют примеры изменения порядка, нарушающие инвариантность, поэтому определение рациональности, сформулированное в теории полезности, нельзя признать надежным. Апологеты теории полезности упорно настаивают на том, что эта теория является лучшей из всех возможных и что ее следует считать нормативной. Однако в настоящее время большинство исследователей признали необходимость пересмотра аксиоматических предположений этой теории.

4. Практические наблюдения и результаты

В этом разделе мы приводим некоторые наблюдения и результаты, полученные практиками и учеными в области принятия решений.

Милан Зелени [5] пишет: «Установлено, что поведение людей существенно отличается от рационалистических аксиом теории полезности.

Люди не максимизируют ожидаемую полезность; они связывают свои суждения с авторитетными для них чужими мнениями; они часто пренебрегают априорными знаниями и настолько же часто игнорируют новые доказательства и так далее...»

В работе Р. Корбина и А. А. Марли [1] сказано следующее: «...Гость, приглашенный на обед, который уважает хозяина, воздержится от выбора самого дорогого блюда из меню. Очевидно, добавление новой альтернативы может переместить самое дорогое блюдо на второе место, увеличивая шансы его выбора, что противоречит принципу регулярности. ...Явно или неявно, они предполагают, что субъекту, совершающему выбор, всегда известно множество всех потенциально доступных альтернатив T, несмотря на то что в любой конкретной задаче рассматривается множество фактически доступных альтернатив A, являющееся некоторым подмножеством T. Наши примеры, опровергающие регулярность, основаны на манипуляции знаниями субъекта (ЛПР) о потенциально доступном множестве T. Таким образом, регулярность не подтверждается, когда субъект совершает выбор в ситуациях, которые характеризуются различным уровнем знаний о потенциально доступном множестве альтернатив».

Д. М. Грэтер и С. Р. Плотт [6] пишут: «Явление инверсии предпочтений, которое противоречит традиционным положениям теории предпочтений, имеет место в практике... Похоже, в настоящее время не существует доступной теории, которая способна адекватно описать чрезвычайно широкий диапазон явлений».

Известный психолог А. Тверский [7] отмечает: «...Растущее число эмпирических доказательств подвергает сомнению предположение об инвариантности, которая является необходимым условием в теории рационального выбора... требование неизменности ранжирования альтернатив вызывает непоследовательные предпочтения, а процедуры выбора альтернатив вызывают инверсию предпочтений, поскольку инвариантность, в отличие от независимости или даже транзитивности, является нормативно недостижимой и дескриптивно некорректной. Похоже, что невозможно построить такую теорию выбора, которая одновременно будет и нормативно приемлемой и дескриптивно адекватной».

В работе [8] сказано: «Даже тогда, когда у субъектов есть весомые стимулы к принятию обоснованных, рациональных решений, явление инверсии предпочтений не исчезает».

А. Тверский и Д. Канеман говорят в работе [9]: «Опора на жизненный опыт и преобладание субъективизма свойственны не только обывателям. Серьезные исследователи склонны поступать также, когда они руководствуются только интуицией. Например, экспериментально установлено, что при изучении статистики в интуитивных суждениях обучаемых существует тенденция предсказывать результаты, которые будут лучшим образом представлять данные, без учета априорной вероятности. И хотя статистики-профессионалы избегают элементарных ошибок, таких как „ошибка игрока", их интуитивные суждения тоже бывают ошибочными в более сложных проблемах».

Эти же авторы пишут в [10]: «Настоящий доклад описывает несколько классов проблем выбора, в которых предпочтения систематически нарушают аксиомы теории полезности. На основе этих наблюдений мы доказываем, что теория полезности в том виде, в котором она обычно интерпретируется и применяется, не является адекватной дескриптивной моделью выбора».

А. Тверский и И. Симонсон отмечают в работе [11]: «Теория рационального выбора предполагает, что альтернативы, из которых совершается выбор, не зависят по предпочтению от наличия или отсутствия других альтернатив. Этот принцип, называемый *независимостью от непричастных альтернатив*, по существу эквивалентен предположению о том, что ЛПР имеет полный порядок предпочтений для всех мыслимых альтернатив, и что из заданного конкретного набора он всегда выберет альтернативу, которая является лучшей в этом наборе. Несмотря на простоту и интуитивную привлекательность, эксперименты показывают, что этот принцип часто нарушается».

К. М. Фримэн с соавторами в [12] отмечают: «Фаркьюхэр и Прэткинс [13] считают очевидными два следующих эффекта: 1) появление привлекательного *фантома* может вызвать *обратный эффект*, т. е. остальные альтернативы из множества доступных для выбора станут менее привлекательными; 2) появление привлекательного *фантома* может привести к изменению важности критериев, т. е. те признаки и особенности, по которым *фантом* превосходит другие альтернативы, становятся более важными в принятия решения. В зависимости от величины и направления этих двух эффектов, результаты выбора из множества доступных альтернатив могут драматически изменяться и могут противоречить основным аксиомам классической теории выбора».

Тадеуш Тизка в [14] также говорит о частых нарушениях на практике условия независимости от непричастных альтернатив, которое является одной из важнейших аксиом теории полезности.

В работе [15] говорится: «Мы находим, что для некоторых функций теории полезности, отражающих несклонность к риску и кажущихся вполне разумными, рекомендуемое поведение для начального решения может быть очень рискованным и не соответствовать интуиции... В принципе, мы можем моделировать мир и в полной мере понимать смысл описывающих его функций полезности. Однако на практике этот идеал далеко не всегда достижим, и в результате мы можем столкнуться с серьезными проблемами при моделировании и оценке».

Марк Маккорд и Ричард Ньюфвилл отмечают [16]: «Эмпирический результат состоит в том, что в зависимости от распределения вероятности, используемого при оценке, функции полезности могут сильно различаться. Этот факт не согласуется с аксиомами теории и делает затруднительным практическое использование анализа решений на основе ожидаемой полезности. ...В заключение можно констатировать, что на сегодняшний день обоснование практического применения теории ожидаемой полезности для принятия решений является слабым».

Вот что пишет Марио Банджи [17] о теории решений (ТР) Неймана и Моргенштерна: «Прежде всего, эта теория была опровергнута экспериментально... Практические результаты противоречат ТР. Более того, они показывают, что люди обладают предпочтениями, но не имеют никаких функций полезности. Защитники этой теории доказывают, что неудачи ТР в объяснении фактического поведения в процессе выбора показывают только то, что люди, которые не руководствуются ТР, ведут себя нерационально. Однако эти защитники не потрудились подтвердить ТР практическими экспериментами, чтобы выяснить, удовлетворяют ли примеры успешных решений предположениям этой теории. Вместо них это сделали критики и установили, что ТР неадекватна как предписывающая (нормативная) теория».

Р. Кини и X. Райфа пишут [18]: «Если мы оценили $k_Y = 0.75$ и $k_Z = 0.25$, мы не можем сказать, что Y в три раза важнее Z. Фактически, мы не можем сделать заключения, что признак Y более важен, чем Z. На следующем шаге не ясно, как можно было бы точно определить понятие о том, что один признак важнее другого».

В заключение этого обзора можно добавить лишь то, что к *рациональности* теории полезности следует относиться критически.

Литература

1. *Corbin R. and Marley A. A. J.* Random Utility Models with Equality: An Apparent, but Not Actual, Generalization of Random Utility Models // Journal of Mathematical Psychology. 1974. 11. P. 274–293.
2. *Saaty T. L.* Fundamentals of Decision Making with the Analytic Hierarchy Process. RWS Publications, 4922 Ellsworth Avenue, Pittsburgh, PA 15213–2807б 1994.
3. *Saaty T. L. and Vargas L. G.* Experiments on Rank Preservation and Reversal in Relative Measurement // Mathematical and Computer Modelling. 1993. 17/4–5. P. 13–18.
4. *Luce R. D. and Raiffa H.* Games and Decisions. New York: Wiley, 1957.
5. *Zeleny M.* Multiple Criteria Decision Making. New York: McGraw-Hill, 1982.
6. *Grether D. M. and Plott C. R.* Economic Theory of Choice and the Preference Reversal Phenomenon // The American Economic Review. 1979. 69/4. P. 623–638.
7. *Tversky A., Slovic P. and Kahneman D.* The Causes of Preference Reversal // The American Economic Review. 1990. 80/1. P. 204–215.

8. *Pommerehne W. W., Schneider F. and Zweifel P.* , Economic Theory of Choice and the Preference Reversal Phenomenon: A Reexamination // The American Economic Review. 1982. 72/3. P. 569–573.
9. *Tversky A. and Kahneman D.* Judgment Under Uncertainty: Heuristics and Biases // Science. 1974. Vol. 185. P. 1124–1131.
10. *Kahneman D. and Tversky A.* Prospect Theory: An Analysis of Decision Under Risk // Econometrica. 1979. 47. P. 263–291.
11. *Tversky A. and Simonson I.* , Context-dependent Preferences // Management Science. 1993. 39/10. P. 1179–1189.
12. *Freeman K. M., Pratkanis A. R. and Farquhar P. H.* Phantoms as Psychological Motivation: Evidence for Compliance and Reactance Processes. University of California; Santa Cruz and Carnegie Mellon University, 1990.
13. *Farquhar P. H. and Pratkanis A. R.* Decision Structuring with Phantom Alternatives // Management Science. 1993. 39/10. P. 1214–1226.
14. *Tyszka T.* Contextual Multiattribute Decision Rules // Human Decision Making / L. Sjoberg, T. Tyszka and J. A. Wise (eds.). Bodafors, Sweden: Doxa, 1983.
15. *McCardle K. F. and Winkler R. L.* Repeated Gambles, Learning, and Risk Aversion // Management Science. 1992. 38/6. P. 807.
16. *McCord M. and Neufville R. de.* Empirical Demonstration that Expected Utility Decision Analysis is Not Operational. Chapter in Foundation of Utility and Risk Theory with Applications / Stigun Wenstop (Ed.). Boston: Reidel Publishing Company, 1983. P. 181–200.
17. *Bunge M.* Treatise on Basic Philosophy. Vol. 7 of Epistemology and Methodology III: Philosophy of Science and Technology. Part II: Life Science, Social Science and Technology. Boston: D. Reidel Publishing Company, 1985.
18. *Keeney R. L. and Raiffa H.* Decisions with Multiple Objectives: Preference and Value Tradeoffs. New York: Wiley, 1976.